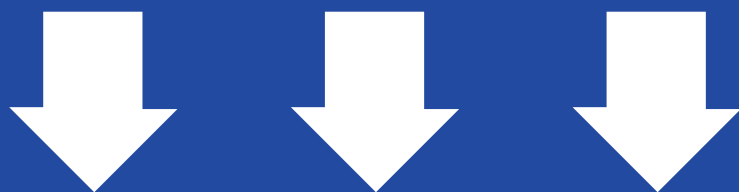


www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT

5

CORRECTION

1. Montrons que pour tout réel $x \geq 1$: $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$:

Pour tout $x \geq 1$, nous avons: $x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq x$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

Ainsi, pour tout réel $x \geq 1$, nous avons bien: $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

2. Déduisons-en que $0 \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx = \frac{e^{-1}}{e^2}$:

Posons pour tout $x \in [1; 2]$: • $g(x) = 0$,

$$\bullet f(x) = e^{-x^2},$$

$$\bullet h(x) = e^{-x}.$$

- Notons que:
- les fonctions g , f et h sont continues sur $[1; 2]$,
 - elles admettent donc des primitives sur $[1; 2]$, et par conséquent:

$$\int_1^2 g(x) dx, \int_1^2 f(x) dx \text{ et } \int_1^2 h(x) dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g , f et h sont positives sur $[1; 2]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 0 \cdot x dx \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \int_1^2 e^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq [-e^{-x}]_1^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

Au total un encadrement de $\int_1^2 e^{-x^2} dx$ sur $[1; 2]$ est: $0 \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{e-1}{e^2}$.