Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 5

CORRECTION

1. **Montrons que pour tout réel $x \geqslant 1$: $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$:**

Pour tout $x \geqslant 1$, nous avons : $x \geqslant 1 \iff x^2 \geqslant x$

$\iff e^{x^2} \geqslant e^x$

$\iff \dfrac{1}{e^{x^2}} \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

$\iff e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$

$\iff 0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.

(car pour tout $X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$)

Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 1$, nous avons bien : $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.

2. **Déduisons-en que $0 \leqslant \displaystyle\int_1^2 e^{-x^2}dx = \frac{e-1}{e^2}$:**

Posons pour tout $x \in [\,1 ; 2\,]$: • $g(x) = 0$,

• $f(x) = e^{-x^2}$,

• $h(x) = e^{-x}$.

Notons que: • les fonctions g, f et h sont continues sur $[\,1\,;\,2\,]$,

• elles admettent donc des primitives sur $[\,1\,;\,2\,]$, et par conséquent:

$$\int_1^2 g(x)\,dx,\ \int_1^2 f(x)\,dx \text{ et } \int_1^2 h(x)\,dx \text{ existent,}$$

• de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[\,1\,;\,2\,]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \int_1^2 g(x)\,dx \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx \leqslant \int_1^2 h(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow\ \int_1^2 0 \times dx \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_1^2 e^{-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,dx \leqslant \left[\,-\,e^{-x}\,\right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

Au total un encadrement de $\int_1^2 e^{-x^2}\,dx$ sur $[\,1\,;\,2\,]$ est: $0 \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,dx \leqslant \dfrac{e-1}{e^2}$.