Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 3

CORRECTION

Déterminons un encadrement de I sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

D'après l'énoncé: • $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) dx$

• $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Dans ces conditions sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ <=> $0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4}$

<=> $1 + 0 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 1 + \frac{1}{4}$

<=> $1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant \frac{5}{4}$

<=> $1 \leqslant \sqrt{1 + x^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$

<=> $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leqslant \frac{1}{1}$

<=> $\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leqslant 1$.

Posons pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$: • $g(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

• $h(x) = 1$.

Notons que: • les fonctions g, f et h sont continues sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

• elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx,\ \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx \text{ existent,}$$

• de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\Longleftrightarrow\ \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{5}}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \times dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}} \leqslant I \leqslant \left[x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant I \leqslant \frac{1}{2}.$$

Au total un encadrement de I sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ est: $\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant I \leqslant \frac{1}{2}.$