

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT

2

CORRECTION

Déterminons un encadrement de I sur $[1; 3]$:

D'après l'énoncé: • $I = \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx$

• $1 \leq x \leq 3$.

Dans ces conditions sur $[1; 3]$: $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 9$

$$\Leftrightarrow 1+1 \leq 1+x^2 \leq 1+9$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 1+x^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Posons pour tout $x \in [1; 3]$: • $g(x) = \frac{1}{10}$,

• $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

• $h(x) = \frac{1}{2}$.

- Notons que:
- les fonctions g , f et h sont continues sur $[1; 3]$,
 - elles admettent donc des primitives sur $[1; 3]$, et par conséquent:

$$\int_1^3 g(x) dx, \int_1^3 f(x) dx \text{ et } \int_1^3 h(x) dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g , f et h sont positives sur $[1; 3]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx \leq \int_1^3 f(x) dx \leq \int_1^3 h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 \frac{1}{10} dx \leq \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \leq \int_1^3 \frac{1}{2} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \times [x]_1^3 \leq I \leq \frac{1}{2} [x]_1^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq I \leq 1.$$

Au total un encadrement de I sur $[1; 3]$ est: $\frac{1}{5} \leq I_n \leq 1.$