Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 1

CORRECTION

Déterminons un encadrement de I_n sur $[\,0\,;\,1\,]$:

D'après l'énoncé: • $I_n = \int_0^1 \left(\dfrac{4x^n}{e^x + x + 1} \right) dx$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

• $1 \leqslant e^x + x \leqslant e + 1.$

Dans ces conditions sur $[\,0\,;\,1\,]$: $1 \leqslant e^x + x \leqslant e + 1$

$$\iff 1 + 1 \leqslant e^x + x + 1 \leqslant e + 1 + 1$$

$$\iff 2 \leqslant e^x + x + 1 \leqslant e + 2$$

$$\iff \frac{1}{e+2} \leqslant \frac{1}{e^x + x + 1} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{4x^n}{e+2} \leqslant \frac{4x^n}{e^x + x + 1} \leqslant \frac{4x^n}{2}$$

(sur $[\,0\,;\,1\,]$, $x^n \geqslant 0$)

$$\iff \frac{4x^n}{e+2} \leqslant \frac{4x^n}{e^x + x + 1} \leqslant 2x^n.$$

Posons pour tout $x \in [0;1]$: • $g(x) = \dfrac{4x^n}{e+2}$,

• $f(x) = \dfrac{4x^n}{e^x + x + 1}$,

• $h(x) = 2x^n$.

Notons que : • les fonctions g, f et h sont continues sur $[0;1]$,

• elles admettent donc des primitives sur $[0;1]$, et par conséquent :

$$\int_0^1 g(x)\,dx,\ \int_0^1 f(x)\,dx \text{ et } \int_0^1 h(x)\,dx \text{ existent,}$$

• de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0;1]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire :

$$\frac{4x^n}{e+2} \leqslant \frac{4x^n}{e^x + x + 1} \leqslant 2x^n$$

$$\iff g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\iff \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$\iff \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{e+2}\right) dx \leqslant \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{e^x + x + 1}\right) dx \leqslant \int_0^1 2x^n\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{4}{e+2}\int_0^1 x^n\,dx \leqslant I_n \leqslant 2 \times \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{4}{e+2} \times \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant 2 \times \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{4}{(n+1)(e+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{2}{(n+1)}.$$

Au total un encadrement de I_n sur $[\,0\,;\,1\,]$ est: $\dfrac{4}{(n+1)(e+2)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.