

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE

4

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-4)} + \frac{b}{(x-1)}$:

Pour tout $x \in [5; 6]$: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$.

Préalablement, notons que: $(x-4) \times (x-1) = x^2 - 5x + 4$.

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-4)} + \frac{b}{(x-1)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{a}{(x-4)} + \frac{b}{(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{a(x-1) + b(x-4)}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)x + (-a-4b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a+b \\ 1 = -a-4b \end{cases}$$

$$\text{cad: } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in [5; 6]: f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{(x-4)} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)}$$

2. Calculons alors $I = \int_5^6 f(x) dx$:

$$\text{Ici: } I = \int_5^6 \left(\frac{\frac{1}{3}}{(x-4)} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)} \right) dx.$$

Soit $f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{(x-4)} - \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)}$. f est continue sur $[5; 6]$. Elle admet donc

des primitives sur $[5; 6]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_5^6 \left(\frac{\frac{1}{3}}{(x-4)} - \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)} \right) dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{3} \times \int_5^6 \frac{1}{(x-4)} dx - \frac{1}{3} \times \int_5^6 \frac{1}{(x-1)} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{3} \times [\ln(x-4)]_5^6 - \frac{1}{3} \times [\ln(x-1)]_5^6$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{3} \times (\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{3} \times (\ln 5 - \ln 4)$$

$$\text{cad: } I = \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 5 + \ln 4).$$

Ainsi: $I = \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 5 + \ln 4)$ ou $I = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{8}{5} \right)$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[5; 6]$:

La valeur moyenne de f sur $[5; 6]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-5} \right) \times \int_5^6 f(x) dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-5} \right) \times \left(\frac{1}{3} \ln \left(\frac{8}{5} \right) \right)$

cad: $\mu = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{8}{5} \right)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[5; 6]$ est: $\mu = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{8}{5} \right)$.