Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE 3

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(2x-1)}$:

Pour tout $x \in [4 ; 6]$: $f(x) = \frac{3x+1}{2x^2 - 3x + 1}$.

Préalablement, notons que: $(x-1) \times (2x-1) = 2x^2 - x - 2x + 1$

$$= 2x^2 - 3x + 1.$$

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(2x-1)}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{a(2x-1) + b(x-1)}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 2ax - a + bx - b$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = (2a + b)x + (-a - b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2a + b \\ 1 = -a - b \end{cases}$$

cad: $\begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,4\,;6\,]$: $f\,(x) = \dfrac{4}{(x-1)} + \dfrac{(-5)}{(2x-1)}$.

2. Calculons alors $I = \displaystyle\int_4^6 f\,(x)\,dx$:

Ici: $I = \displaystyle\int_4^6 \left(\frac{4}{(x-1)} - \frac{5}{(2x-1)}\right) dx$.

Soit $f\,(x) = \dfrac{4}{(x-1)} - \dfrac{5}{(2x-1)}$. f est continue sur $[\,4\,;6\,]$. Elle admet donc

des primitives sur $[\,4\,;6\,]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_4^6 \left(\frac{4}{(x-1)} - \frac{5}{(2x-1)}\right) dx \iff I = 4 \times \int_4^6 \frac{1}{(x-1)}\,dx - 5 \times \int_4^6 \frac{1}{(2x-1)}\,dx$$

$$\iff I = 4 \times \Big[\ln\,(x-1)\Big]_4^6 - 5 \times \left[\frac{\ln\,(2x-1)}{2}\right]_4^6$$

$$\iff I = 4 \times (\ln 5 - \ln 3) - \frac{5}{2} \times (\ln 11 - \ln 7)$$

cad: $I = 4\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) - \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{11}{7}\right)$.

Ainsi: $I = 4\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) - \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{11}{7}\right)$.

3. **Déduisons-en la valeur moyenne de f sur [4 ; 6]:**

La valeur moyenne de f sur [4 ; 6] correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-4}\right) \times \int_4^6 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-4}\right) \times \left(4 \ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{5}{2} \ln\left(\frac{11}{7}\right)\right)$

cad: $\mu = 2 \ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{5}{2} \ln\left(\frac{11}{7}\right).$

Ainsi, la valeur moyenne de f sur [4 ; 6] est: $\mu = 2 \ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{5}{2} \ln\left(\frac{11}{7}\right).$