

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE

2

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)}$:

Pour tout $x \in [0; 3]$: $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+x-6}$.

Préalablement, notons que: $(x-2) \times (x+3) = x^2 + x - 6$.

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{a(x+3)+b(x-2)}{x^2+x-6}$$

$$\Leftrightarrow 3x+2 = ax+3a+bx-2b$$

$$\Leftrightarrow 3x+2 = (a+b)x + (3a-2b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a+b \\ 2 = 3a-2b \end{cases}$$

$$\text{cad: } \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 3]$: $f(x) = \frac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \frac{\frac{7}{5}}{(x+3)}$.

2. Calculons alors $I = \int_0^3 f(x) dx$:

Ici: $I = \int_0^3 \left(\frac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \frac{\frac{7}{5}}{(x+3)} \right) dx$.

Soit $f(x) = \frac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \frac{\frac{7}{5}}{(x+3)}$. f est continue sur $[0; 3]$. Elle admet donc

des primitives sur $[0; 3]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_0^3 \left(\frac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \frac{\frac{7}{5}}{(x+3)} \right) dx \Leftrightarrow I = \frac{8}{5} \times \int_0^3 \frac{1}{(x-2)} dx + \frac{7}{5} \times \int_0^3 \frac{1}{(x+3)} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{8}{5} \times [\ln|x-2|]_0^3 + \frac{7}{5} \times [\ln|x+3|]_0^3$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{8}{5} \times (\ln 1 - \ln 2) + \frac{7}{5} \times (\ln 6 - \ln 3)$$

cad: $I = -\frac{8}{5} \ln(2) + \frac{7}{5} \ln(2)$.

Ainsi: $I = -\frac{8}{5} \ln(2) + \frac{7}{5} \ln(2)$ ou $I = -\frac{\ln(2)}{5}$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[0; 3]$:

La valeur moyenne de f sur $[0; 3]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{3-0} \right) \times \int_0^3 f(x) dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{3-0} \right) \times \left(-\frac{\ln(2)}{5} \right)$

cad: $\mu = -\frac{\ln(2)}{15}$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[0; 3]$ est: $\mu = -\frac{\ln(2)}{15}$.