Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE

1

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$:

Pour tout $x \in [2 ; 4]$: $f(x) = \dfrac{6x-3}{x-1}$.

Dans ces conditions: $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$ $\iff \dfrac{6x-3}{x-1} = a + \dfrac{b}{x-1}$

$$\iff \frac{6x-3}{x-1} = \frac{a(x-1)+b}{x-1}$$

$$\iff 6x - 3 = ax - a + b$$

$$\iff \begin{cases} 6 = a \\ -3 = -a + b \end{cases}$$

cad: $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [2 ; 4]$: $f(x) = 6 + \dfrac{3}{x-1}$.

2. Calculons alors $I = \int_2^4 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \int_2^4 \left(6 + \frac{3}{x-1}\right) dx$.

Soit $f(x) = 6 + \frac{3}{x-1}$. f est continue sur [2 ; 4]. Elle admet donc des primitives sur [2 ; 4] et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_2^4 \left(6 + \frac{3}{x-1}\right) dx \iff I = \int_2^4 6\,dx + \int_2^4 \frac{3}{x-1}\,dx$$

$$\iff I = [\,6x\,]_2^4 + [\,3\ln(x-1)\,]_2^4$$

$$\iff I = (24 - 12) + (3\ln(3) - 3\ln(1))$$

cad: $I = 12 + 3\ln(3)$.

Ainsi: $I = 12 + 3\ln(3)$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur [2 ; 4]:

La valeur moyenne de f sur [2 ; 4] correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{4-2}\right) \times \int_2^4 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{4-2}\right) \times (12 + 3\ln(3))$

cad: $\mu = 6 + \frac{3}{2} \ln(3)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[2 ; 4]$ est: $\mu = 6 + \frac{3}{2} \ln(3)$.