Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b, c ? ET VALEUR MOYENNE

3

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+3)}$:

Pour tout $x \in [3; 6]$: $f(x) = \frac{1}{x^3 - 7x + 6}$.

Préalablement, notons que : $(x-2) \times (x-1) \times (x+3) = (x^2 - 3x + 2) \times (x+3)$

$= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 2x + 6$

$= x^3 - 7x + 6$.

Dans ces conditions : $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+3)}$

$\iff \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{a(x-1)(x+3) + b(x-2)(x+3) + c(x-2)(x-1)}{x^2 - 7x + 6}$

$\iff 1 = (a+b+c)x^2 + (2a+b-3c)x + (-3a-6b+2c)$

$$\iff \begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = 2a + b - 3c \\ 1 = -3a - 6b + 2c \end{cases}$$

cad: $\begin{cases} a = \dfrac{1}{5} \\ b = -\dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{20} \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [3;6]$: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)} + \dfrac{\frac{1}{20}}{(x+3)}$.

2. Calculons alors $I = \int_3^6 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \int_3^6 \left(\dfrac{\frac{1}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)} + \dfrac{\frac{1}{20}}{(x+3)} \right) dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{\frac{1}{5}}{(x-2)} - \dfrac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \dfrac{\frac{1}{20}}{(x+3)}$. f est continue sur $[3;6]$. Elle admet donc des primitives sur $[3;6]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_3^6 \left(\dfrac{\frac{1}{5}}{(x-2)} - \dfrac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \dfrac{\frac{1}{20}}{(x+3)} \right) dx$$

$$\iff I = \frac{1}{5} \times \int_3^6 \frac{1}{(x-2)}\,dx - \frac{1}{4} \times \int_3^6 \frac{1}{(x-1)}\,dx + \frac{1}{20} \times \int_3^6 \frac{1}{(x+3)}\,dx$$

$$\iff I = \frac{1}{5} \times \Big[\ln(x-2) \Big]_3^6 - \frac{1}{4} \times \Big[\ln(x-1) \Big]_3^6 + \frac{1}{20} \times \Big[\ln(x+3) \Big]_3^6$$

cad: $I = \frac{1}{5}\ln 4 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{20}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Ainsi: $I = \frac{1}{5}\ln 4 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{20}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[3\,;6]$:

La valeur moyenne de f sur $[3\,;6]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-3}\right) \times \int_3^6 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-3}\right) \times \left(\frac{1}{5}\ln 4 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{20}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

cad: $\mu = \frac{1}{15}\ln 4 - \frac{1}{12}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{60}\left(\frac{3}{2}\right)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[3\,;6]$ est: $\mu = \frac{1}{15}\ln 4 - \frac{1}{12}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{60}\left(\frac{3}{2}\right)$.