# Spé Maths
## Terminale

# Calcul d'intégrales

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# a, b, c ? ET VALEUR MOYENNE

2

## CORRECTION

1. Écrivons $f$ sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)} + \frac{c}{(x-1)}$ :

Pour tout $x \in [0;6]$: $f(x) = \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)}$.

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)} + \frac{c}{(x-1)}$

<=> $\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)} = \frac{a(x+3)(x-1) + b(x-2)(x-1) + c(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x-1)}$

<=> $3x + 2 = (a+b+c)x^2 + (2a-3b+c)x + (-3a+2b-6c)$

<=> $\begin{cases} 0 = a+b+c \\ 3 = 2a-3b+c \\ 2 = -3a+2b-6c \end{cases}$

cad: $\begin{cases} a = \dfrac{8}{5} \\ b = -\dfrac{7}{20} \\ c = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;6\,]$: $f\,(x) = \dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\left(-\frac{7}{20}\right)}{(x+3)} + \dfrac{\left(-\frac{5}{4}\right)}{(x-1)}$.

2. Calculons alors $I = \int_0^6 f\,(x)\,dx$:

Ici: $I = \int_0^6 \left( \dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\left(-\frac{7}{20}\right)}{(x+3)} + \dfrac{\left(-\frac{5}{4}\right)}{(x-1)} \right) dx$.

Soit $f\,(x) = \dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} - \dfrac{\frac{7}{20}}{(x+3)} - \dfrac{\frac{5}{4}}{(x-1)}$. $f$ est continue sur $[\,0\,;6\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;6\,]$ et par conséquent $I$ **existe**.

$$I = \int_0^6 \left( \dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} - \dfrac{\frac{7}{20}}{(x+3)} - \dfrac{\frac{5}{4}}{(x-1)} \right) dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad I = \frac{8}{5} \times \int_0^6 \frac{1}{(x-2)}\,dx - \frac{7}{20} \times \int_0^6 \frac{1}{(x+3)}\,dx - \frac{5}{4} \times \int_0^6 \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad I = \frac{8}{5} \times \Big[ \ln|x-2| \Big]_0^6 - \frac{7}{20} \times \Big[ \ln|x+3| \Big]_0^6 - \frac{5}{4} \times \Big[ \ln|x-1| \Big]_0^6$$

$$\iff I = \frac{8}{5} \times (\ln 4 - \ln 2) - \frac{7}{20} \times (\ln 9 - \ln 3) - \frac{5}{4} \times (\ln 5 - \ln 1)$$

cad: $I = \frac{8}{5}\ln 2 - \frac{7}{20}\ln 3 - \frac{5}{4}\ln 5.$

Ainsi: $I = \frac{8}{5}\ln 2 - \frac{7}{20}\ln 3 - \frac{5}{4}\ln 5.$

**3. Déduisons-en la valeur moyenne de $f$ sur $[\,0\,;6\,]$:**

La valeur moyenne de $f$ sur $[\,0\,;6\,]$ correspond au nombre $\mu$ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-0}\right) \times \int_0^6 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-0}\right) \times \left(\frac{8}{5}\ln 2 - \frac{7}{20}\ln 3 - \frac{5}{4}\ln 5\right)$

cad: $\mu = \frac{4}{15}\ln 2 - \frac{7}{120}\ln 3 - \frac{5}{24}\ln 5.$

Ainsi, la valeur moyenne de $f$ sur $[\,0\,;6\,]$ est: $\mu = \frac{4}{15}\ln 2 - \frac{7}{120}\ln 3 - \frac{5}{24}\ln 5.$