Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b, c ? ET VALEUR MOYENNE

1

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$:

Pour tout $x \in]\ 1 ; +\infty\ [$: $f(x) = \frac{2x^2}{3(x-1)^2}$.

Dans ces conditions: $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$

$$\iff \frac{2x^2}{3(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$\iff \frac{2x^2}{3} = a(x^2 + 1 - 2x) + b(x-1) + c$$

$$\iff \frac{2}{3}x^2 = ax^2 + (-2a+b) + (a-b+c)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3} = a \\ -2a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{cad:} \quad \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]\ 1 ; +\infty [$: $\quad f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3(x-1)} + \dfrac{2}{3(x-1)^2}$.

2. Calculons alors $I = \displaystyle\int_3^7 f(x)\,dx$:

Ici : $\quad I = \displaystyle\int_3^7 \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3(x-1)} + \dfrac{2}{3(x-1)^2} \right) dx.$

Soit $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3(x-1)} + \dfrac{2}{3(x-1)^2}$. f est continue sur $[\ 3 ; 7\ ]$. Elle admet donc des primitives sur $[\ 3 ; 7\ ]$ et par conséquent **I existe**.

$$I = \int_3^7 \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x-1)^2} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \int_3^7 \frac{2}{3}\,dx + \int_3^7 \frac{4}{3(x-1)}\,dx + \int_3^7 \frac{2}{3(x-1)^2}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad I = \left[\frac{2}{3} x \right]_3^7 + \frac{4}{3} \left[\ln(x-1) \right]_3^7 + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{(x-1)} \right]_3^7$$

$$\Longleftrightarrow \quad I = \left(\frac{14}{3} - 2 \right) + \frac{4}{3} \left(\ln(6) - \ln(2) \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

cad: $I = \dfrac{26}{9} + \dfrac{4}{3} \ln(3).$

Ainsi: $I = \dfrac{26}{9} + \dfrac{4}{3} \ln(3).$

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[\,3\,;\,7\,]$:

La valeur moyenne de f sur $[\,3\,;\,7\,]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{7-3} \right) \times \int_3^7 f(x)\, dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\dfrac{1}{7-3} \right) \times \left(\dfrac{26}{9} + \dfrac{4}{3} \ln(3) \right)$

cad: $\mu = \dfrac{26}{36} + \dfrac{1}{3} \ln(3).$

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[\,3\,;\,7\,]$ est: $\mu = \dfrac{26}{36} + \dfrac{1}{3} \ln(3).$