

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

«**ln**» : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude d'une fonction

1. a. Montrons que  $f'(x) = -36x \ln x$ :

Ici: •  $f(x) = 9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10$

•  $Df = ]0; 1, 5]$

Posons:  $f = f_1 \times (1 - 2f_2) + f_3$ , avec:  $f_1(x) = 9x^2$ ,  $f_2(x) = \ln x$  et  $f_3(x) = 10$ .

$f_1$  et  $f_3$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle  $]0; 1, 5]$

$f_2$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme fonction "ln", donc dérivable sur  $]0; 1, 5]$ .

Par conséquent,  $h = f_1 \times (1 - 2f_2)$  est dérivable sur  $]0; 1, 5]$  comme produit de 2 fonctions dérivables sur  $]0; 1, 5]$ .

Donc,  $f$  est dérivable sur  $]0; 1, 5]$  comme somme  $(h + f_3)$  de 2 fonctions dérivables sur  $]0; 1, 5]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in ]0; 1, 5]$ .

Pour tout  $x \in ]0; 1, 5]$ :  $f'(x) = 18x (1 - 2 \ln x) + 9x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right)$   
 $\Rightarrow f'(x) = -36x \ln x$ .

**Au total:** pour tout  $x \in ]0;1,5]$ ,  $f'(x) = -36x \ln x$ .

### 1. b. Étudions le signe de $f'$ sur $]0;1,5]$ :

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x$  de  $]0;1,5]$ :

• **1<sup>er</sup> cas:**  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -36x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \text{ (car } x \neq 0), \text{ cad: } x = 1.$$

• **2<sup>eme</sup> cas:**  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } -36x \ln x < 0 \iff \ln x > 0, \text{ cad: } x \in ]1;1,5].$$

• **3<sup>eme</sup> cas:**  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } -36x \ln x > 0 \iff \ln x < 0, \text{ cad: } x \in ]0;1[.$$

**Au total:** •  $f$  est croissante sur  $]0;1]$ ,

(car sur  $]0;1]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )

•  $f$  est décroissante sur  $[1;1,5]$ .

(car sur  $[1;1,5]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

### 1. c. Déduisons-en les variations de $f$ sur $]0;1,5]$ :

**Comme nous l'avons déjà dit:** •  $f$  est croissante sur  $]0;1]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[1;1,5]$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

$x$	0	1	1,5		
$f'$		+	0	-	
$f$			$a$	$b$	$c$

Avec: •  $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow a = -\infty,$

•  $b = f(1) \Rightarrow b = 19,$

•  $c = f(1,5) \Rightarrow c = 30,25 - 40,5 \ln(1,5) > 0.$

2. Montrons que la courbe représentative de  $f$  admet un point d'inflexion dont l'abscisse est  $e^{-1}$ :

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Ici:  $f''(x) = -36 \ln x - 36$ , pour tout  $x \in ]0;1,5]$ .

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x \in ]0;1,5]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f''(x) = 0.$

$f''(x) = 0$  ssi  $-36 \ln x - 36 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$ , cad:  $x = e^{-1}.$

• 2<sup>eme</sup> cas:  $f''(x) < 0.$

$f''(x) < 0$  ssi  $-36 \ln x - 36 < 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$ , cad:  $x > e^{-1}.$

• 3<sup>eme</sup> cas:  $f''(x) > 0.$

$f''(x) > 0$  ssi  $-36 \ln x - 36 > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1$ , cad:  $x < e^{-1}.$

**Au total:** la dérivée seconde s'annule et change bien de signe quand  $x = e^{-1}.$

Donc la courbe représentative  $f$  admet un point d'inflexion dont l'abscisse est:

$$x = e^{-1}.$$

3. a. Montrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0;1,5]$ :

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x$$

Ici:  $f$  est continue sur  $]0;1,5]$ . Elle admet donc une primitive  $F$  dérivable sur l'intervalle  $]0;1,5]$  et  $F$  est telle que:  $F' = f$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in ]0;1,5], \quad F'(x) &= 10 + 15x^2 - (18x^2 \ln x + 6x^3 \times \left(\frac{1}{x}\right)) \\ &\Leftrightarrow F'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x) \\ &\Rightarrow F'(x) = 9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10. \end{aligned}$$

Au total, on a bien, pour tout  $x \in ]0;1,5]$ :  $F$  est une primitive de  $f$  car  $F' = f$ .

3. b. Calculons  $\int_1^{1,5} f(x) dx$ :

$$\text{Ici, il s'agit de calculer: } I = \int_1^{1,5} f(x) dx.$$

$f$  est continue sur  $]1;1,5]$ , elle admet donc des primitives sur  $]1;1,5]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$I = \int_1^{1,5} [9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10] dx$$

$$= [10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x]_1^{1,5}$$

$$\Rightarrow I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5).$$

En arrondissant au centième, nous obtenons:  $I \approx 8,66$ .

Au total, l'aire exacte demandée est:  $I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5)$  ou  $I \approx 8,66$ .

## Partie B: Application économique

**Proposition 1:** " Sur la période des 6 derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur ".

C'est vrai.

Justifions le.

La période des 6 derniers mois correspond à l'intervalle:  $[1; 1,5]$ .

Or, le pourcentage de variation entre  $t = 1$  et  $t = 1,5$  est:  $\frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100$ .

$$\frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 = \frac{13,83 - 19}{19} \times 100$$

$$\Rightarrow \frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 \approx -27,21\%$$

Dans ces conditions, le prix de l'action en  $t = 1,5$  est de:

$$P_{1,5} = P_1 (1 - 27,21\%)$$

$$\Leftrightarrow P_{1,5} = 19 (1 - 27,21\%)$$

$$\Rightarrow P_{1,5} \approx 13,83 \text{ €}.$$

**Au total,** l'action a bien perdu plus d'un quart de sa valeur:  $27,21\% > 25\%$ .

**Proposition 2:** " Sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 € ".

C'est faux.

## Justifions le.

Pour justifier notre réponse, nous allons calculer la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[1; 1,5]$ .

Soit " $m$ ", la valeur moyenne de  $f$  sur  $[1; 1,5]$ .

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{1,5 - 1} \int_1^{1,5} f(x) dx.$$

$$m = \frac{1}{1,5 - 1} \int_1^{1,5} f(x) dx \iff m = 2 \int_1^{1,5} f(x) dx$$

$$\iff m = 2 [F(x)]_1^{1,5}$$

$$\Rightarrow m \approx 17,33 \text{ €} > 17 \text{ €}.$$

**Au total**, sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été supérieure à 17 €.