

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Démontrons que pour tout x de $[1; 25]$, $f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

Ici: • $f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}$ $\left(\frac{u}{v}\right)$

• $Df = [1; 25]$.

Posons: $f = \frac{f_1 - f_2}{f_3}$, avec: $f_1(x) = x + 2$, $f_2(x) = \ln(x)$ et $f_3(x) = x$.

f est dérivable sur $[1; 25]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[1; 25]$.

(Et: pour tout $x \in [1; 25]$, $f_3(x) \neq 0$)

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [1; 25]$.

Pour tout $x \in [1; 25]$:

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times (x) - (x + 2 - \ln(x)) \times (1)}{x^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{(x - 1) - (x + 2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$= \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$$

Au total, pour tout $x \in [1; 25]$, nous avons bien: $f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

1. b. Résolvons dans $[1; 25]$, l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [1; 25]: \quad -3 + \ln(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) > 3 \\ &\Leftrightarrow e(\ln(x)) > e^3 \\ &\Leftrightarrow x > e^3. \end{aligned}$$

Au total, l'inéquation admet comme solution: $x \in]e^3; 25]$.

1. c. Dressons le tableau des variations de f sur $[1; 25]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [1; 25]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-3 + \ln(x) = 0$, cad: $x = e^3$ (question précédente).

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-3 + \ln(x) < 0$, cad: $x \in [1; e^3[$.

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-3 + \ln(x) > 0$, cad: $x \in]e^3; 25]$.

Au total: • f est décroissante sur $[1; e^3]$,

(car sur $[1; e^3]$, $f'(x) \leq 0$)

• f est croissante sur $[e^3; 25]$.

(car sur $[e^3; 25]$, $f'(x) \geq 0$)

Nous pouvons alors dresser le tableau des variations suivant:

x	1	e^3	25
f'		$-$	$+$
f	a	b	c

Avec: • $a = f(1) \Rightarrow a = 3,$

• $b = f(e^3) \Rightarrow b = 1 - \frac{1}{e^3},$

• $c = f(25) \Rightarrow c = \frac{27 - \ln(25)}{25}.$

1. d. Montrons que sur $[1; 25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[1; 25]$, donc sur $[1; e^3]$, car: $1,5 \in [f(e^3); f(1)]$.

• " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(e^3) = 1 - \frac{1}{e^3}$

et: $f(1) = 3$.

• f est strictement décroissante sur $[1; e^3]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet une **unique** solution α appartenant à $[1; e^3]$, et plus généralement à $[1; 25]$.

Au total: $f(x) = 1,5$ admet exactement une solution unique α sur $[1; 25]$.

1. e. Déterminons un encadrement d'amplitude 0,01 de α :

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de α :

$\alpha \in]2,31; 2,32[$ à 10^{-2} près.

Au total: $\alpha \in]2,31; 2,32[$ à 10^{-2} près.

2. a. a1. Déterminons le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal:

D'après l'énoncé: • la fonction f représente le coût moyen de fabrication d'une pièce électronique (en euros),

• x correspond au nombre de pièces électroniques (en centaines).

Le coût moyen de fabrication (CM) est minimal quand la fonction f est minimale.

Or, la fonction f est minimale quand: $x = e^3$, d'après le tableau des variations.

Ainsi, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal est d'environ: $x \approx 20,09$ cad: $x \approx 2009$ pièces.

2. a. a2. Déterminons le coût moyen minimal, au centime d'euro près:

Cela revient à déterminer: $f(e^3)$.

Or: $f(e^3) = b = 1 - \frac{1}{e^3}$, d'après le tableau des variations.

Ainsi, le coût moyen minimal pour fabriquer 2009 pièces est d'environ:

$$CM_{\min} \approx 0,95 \text{ euro/pièce.}$$

2. b. Déterminons le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro:

Il s'agit de déterminer x tel que: $f(x) \leq 1,5$.

En ayant recours à la réponse de la question 1. e., nous pouvons affirmer qu'en fabriquant au minimum 232 pièces (2,32 x 100), le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

Au total: en fabriquant au minimum 232 pièces électroniques, le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

2. c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ?

La réponse de la question 2. a. a2 nous indique que le coût moyen minimal est de:

$$0,95 \text{ euro} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

Comme $0,95 > 0,5$: non, il n'est pas possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes.