

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Montrons que les points "B" et "I" appartiennent à la courbe Cf de f:

Ici:

- $f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$
- $Df = [2; 2e]$
- $B = (2e; 2)$ et $I(2; 0)$.

- B appartient à la courbe représentative de f ssi: $2 = (2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2$.

Or: $(2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = (2e) \times (1) - 2e + 2$

$$\Leftrightarrow (2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2.$$

Donc oui: $B \in Cf$.

- I appartient à la courbe représentative de f ssi: $0 = (2) \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2$.

Or: $(2) \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = (2) \times \ln(1) - 2 + 2$

$$\Leftrightarrow (2) \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0.$$

Donc oui: $I \in Cf$.

Au total: "B" et "I" appartiennent bien à Cf.

1. b. Montrons que l'axe des abscisses est tangent à la courbe Cf au point I:

Cela est vérifié ssi: • $I \in Cf$

et: • la dérivée de f au point I est nulle, car dans ce cas l'équation de la tangente au point I est $y = 0$.

• $I \in Cf$, d'après la question précédente.

• Calculons f' :

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f_3(x) = -x + 2$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[2; 2e]$.

f_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme fonction "ln", donc dérivable sur $[2; 2e]$.

Par conséquent, $h = f_1 \times f_2$ est dérivable sur $[2; 2e]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[2; 2e]$.

Enfin, f est dérivable sur $[2; 2e]$ comme somme ($h + f_3$) de 2 fonctions dérivables sur $[2; 2e]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [2; 2e]$.

Pour tout $x \in [2; 2e]$: $f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans ces conditions, au point I (2;0): $f'(2) = 0$.

Donc la dérivée de f au point I est bien nulle.

Au total: l'axe des abscisses est bien tangent à la courbe C_f au point I .

2. a. Déterminons une équation de la droite T et les coordonnées du point D :

D'après l'énoncé: • T est tangente à C_f au point $B(2e; 2)$

• D est le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses.

Étape 1: on détermine l'équation de la tangente T .

Nous savons que: • pour tout $x \in [2; 2e]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$
 • l'équation de T est: $y - y_B = f'(B)(x - x_B)$.

D'où, l'équation de la droite T est: $y - 2 = f'(2e)(x - 2e) \Rightarrow y = x - 2e + 2$.

Ainsi, l'équation de la droite T est: $y = x - 2e + 2$.

Étape 2: on détermine les coordonnées du point D .

Comme D est sur l'axe des abscisses: $y_D = 0$.

Dans ces conditions, nous avons:

$$y = x - 2e + 2 \Leftrightarrow 0 = x - 2e + 2 \Rightarrow x_D = 2e - 2.$$

Ainsi, le point D est tel que: $D(2e - 2; 0)$.

2. b. Déterminons un encadrement du volume de la cuve:

- S est encadrée par: • l'aire du triangle ABI
- l'aire du trapèze $AIDB$.

- Or :
- l'aire du triangle ABI , qui est rectangle en A , est: $\mathcal{A}1 = \frac{1}{2}[AI \times AB]$,
 - l'aire du trapèze $AIDB$ est: $\mathcal{A}2 = \frac{1}{2}(ID + AB) \times AI$.

Nous obtenons ainsi: $\mathcal{A}1 = (2e - 2)m^2$ et $\mathcal{A}2 = (4e - 6)m^2$.

En conclusion, S est telle que: $\mathcal{A}1 < S < \mathcal{A}2$ ou encore: $2e - 2 < S < 4e - 6$.

- Nous savons que la longueur de la cuve est de 5 mètres.

Dans ces conditions, le volume V de la cuve est tel que: $5(2e - 2) < V < 5(4e - 6)$
 cad: $17,18 < V < 24,37$.

Ainsi, le volume V de la cuve est compris entre: $17,18 \text{ m}^3$ et $24,37 \text{ m}^3$.

3. a. Montrons que G est une primitive de g :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}, \quad \text{et: } g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ici: g est continue sur $[2; 2e]$. Elle admet donc une primitive G dérivable sur l'intervalle $[2; 2e]$ et G est telle que: $G' = g$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [2; 2e]: \quad G'(x) &= \left(\frac{2x}{2}\right) \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow G'(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ &\Rightarrow G'(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Au total, on a bien pour tout $x \in [2; 2e]$: G est une primitive de g car $G' = g$.

3. b. Déduisons-en une primitive F de f sur $[2; 2e]$:

Nous remarquons que: $f(x) = g(x) - x + 2$, pour tout $x \in [2; 2e]$.

Dans ces conditions, nous avons, pour tout $x \in [2; 2e]$:

$$F(x) = G(x) + \int (-x + 2) dx$$

$$\Leftrightarrow F(x) = G(x) + \left[\frac{-x^2}{2} + 2x \right]$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \left(\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} \right) + \left(\frac{-x^2}{2} + 2x \right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x.$$

Au total, une primitive F de f sur $[2; 2e]$ est: $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x$.

3. c. c1. Déterminons la valeur exacte de S :

$$S = AB \times AI - \int_2^{2e} f(x) dx \Leftrightarrow S = (2e - 2) \times 2 - \int_2^{2e} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow S = (4e - 4) - \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x \right]_2^{2e}$$

$$\Rightarrow S = (e^2 - 3)m^2.$$

Au total, la valeur exacte de S est: $(e^2 - 3)m^2$.

3. c. c2. Déduisons-en une valeur approchée du volume V :

Nous savons que la longueur de la cuve est de 5 mètres.

Dans ces conditions: $V = 5 \times (e^2 - 3)$

$$\Rightarrow V \approx 22m^3, \text{ au } m^3 \text{ près.}$$

Au total, une valeur approchée du volume V est: $V \approx 22m^3, \text{ au } m^3 \text{ près.}$

Partie B:

1. Déterminons le volume d'eau demandé:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

Il s'agit de déterminer $V(x)$ quand $f(x) = 1$.

Par tâtonnement et à l'aide d'une machine à calculer:

$$f(\alpha) = 1 \text{ quand } \alpha \in [4,31; 4,32].$$

Dans ces conditions, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires:

$$V(4,31) \leq V(\alpha) \leq V(4,32) \Leftrightarrow 7,44 \leq V(x) \leq 7,53.$$

En conclusion, le volume d'eau demandé est: 7m^3 , au m^3 près.

2. Interprétons le résultat de l'algorithme:

L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve lorsque cette dernière est à moitié remplie.