Spé Maths
Terminale

« ln » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC LN 2

CORRECTION

Partie A:

1. Calculons f', pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 9]:

Ici: • $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln x$

• $Df = [\,1\,;\,9\,]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur [1 ; 9].

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,1\,;\,9\,]$.

Pour tout $x \in [\,1\,;\,9\,]$: $f'(x) = x - 7 + \dfrac{6}{x}$ cad: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

Au total, pour tout $x \in [\,1\,;\,9\,]$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. a. Etudions les variations de f sur l'intervalle [1 ; 9]:

Préalablement, résolvons l'équation: $x^2 - 7x + 6 = 0$, pour tout $x \in [\,1\,;\,9\,]$ (1).

$\Delta = 49 - 4 \times 1 \times 6$ cad: $\Delta = 25 = (5)^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

• $x_1 = \dfrac{7 - 5}{2}$ cad: $x_1 = 1$,

• $x_2 = \frac{7+5}{2}$ cad: $x_2 = 6$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,1\,;\,9\,]$:

• 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$ cad ssi: $x \in [\,1\,;\,6\,]$.

• 2ème cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $x^2 - 7x + 6 \geqslant 0$ cad ssi: $x \in [\,6\,;\,9\,]$.

Au total: • f est décroissante sur $[\,1\,;\,6\,]$,

• f est croissante sur $[\,6\,;\,9\,]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	1		6		9
f'	0	-	0	+	
f	a	↘	b	↗	c

Avec: • $a = 7,5$,

• $b = -10 + 6\ln(6)$,

• $c = -8,5 + 6\ln(10)$.

2. b. Justifions que, sur l'intervalle $[\,1\,;\,9\,]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,;\,b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,;\,b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,;\,b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a\,;\,b]$.

Ici: • f est continue sur $[\,1\,;\,9\,]$, donc sur $[\,1\,;\,6\,]$.

• " $k = 5$ " est compris entre: $f(6) = -10 + 6\ln(6) < 5$

et: $f(1) = 7,5 > 5$.

• f est strictement décroissante sur $]\,1\,;\,6\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 5$ $(k = 5)$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]\,1\,;\,6\,[$.

Au total: $f(x) = 5$ admet exactement une solution unique α sur $]\,1\,;\,6\,[$.

2. c. Donnons un encadrement au centième près de α:

A l'aide d'une machine à calculer, nous pouvons dire que:

$$2,55 \leqslant \alpha \leqslant 2,56.$$

Au total, un encadrement au centième près de α est:

$$2,55 \leqslant \alpha \leqslant 2,56.$$

2. d. Déterminons la valeur numérique que contient la variable X à la fin de l'exécution de l'algorithme:

A la fin de l'exécution de l'algorithme: **X = 2, 56**.

Ainsi, la valeur numérique que contient X à la fin de l'exécution est: 2, 56.

3. Déterminons la quantité de pneus pour que le coût moyen de fabrication d'un pneu soit minimal:

D'après l'énoncé la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu (en centaines d'euros), pour x centaines de pneus produits.

Dans ces conditions, le coût moyen annuel est minimal quand f est minimale cad quand f atteint son minimum.

Or f atteint son minimum quand: $x = 6$, **d'après le tableau des variations**.

Et dans ce cas: $f(6) \approx 0,75$.

Ainsi:
- le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est minimal quand l'entreprise fabrique **6 x 100 = 600 pneus**;
- et, ce coût minimum par pneu est égal à $f(6) \times 100 \approx 0,75$ €.

Partie B:

1. Donnons une primitive G de la fonction g sur [0; 100]:

Ici:
- $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$
- $D_g = [0; 100]$.

Dans ces conditions, une primitive G de g sur [0; 100] est:

$$G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}.$$

Ainsi sur [0; 100]: $G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}$.

2. Calculons la valeur moyenne de la fonction g sur [0; 100]:

D'après le cours, la valeur moyenne **m** de g sur [0; 100] est telle que:

$$m = \frac{1}{100 - 0} \int_0^{100} g(x)\, dx.$$

La fonction g est continue sur [0; 100]; elle admet donc des primitives sur [0; 100] et par conséquent: $\int_0^{100} g(x)\, dx$ existe.

D'où: $m = \frac{1}{100} \left[G(x) \right]_0^{100}$

$$= \frac{1}{100} \left[x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x} \right]_0^{100}$$

$$= \frac{1}{100} (10\,000 - 100 + 20\, e^5 - 20)$$

$$= \frac{9880 + 20e^5}{100}.$$

Au total: $m = 98,8 + 0,2e^5 \approx 128,48$.

3. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie qu'un semoir coûte en moyenne: $128,48 \times 100 = 12\,848$ € à fabriquer par l'entreprise.