Spé Maths
Terminale

« ln » : Études de fonctions

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.
   a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :
   $$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$
   où h' désigne la fonction dérivée de h.

   b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.

   c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $\big(x; g(x)\big)$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g.

   a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

   b. Placer sur le graphique fourni en annexe les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

   a. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe.

   b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :
   $$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

   c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :
        λ est un réel positif
        S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :
        Saisir S
        λ prend la valeur 0
Traitement :
        Tant Que 1 − (λ+1)/e^λ < S faire
            λ prend la valeur λ + 1
        Fin Tant Que
Sortie :
        Afficher λ
```

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0{,}8$?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

ANNEXE