Spé Maths
Terminale

« ln » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC LN 16

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons la limite de la fonction h en $+\infty$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x}$ (u x v)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}}.$$

Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{U \to +\infty} \dfrac{U}{e^{U}} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0.$

Au total: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0.$

2. Étudions le sens de variation de la fonction h sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et dressons son tableau de variations:

• **Calculons h ':**

Ici: • $h(x) = \dfrac{x}{e^{x}}$

• $D_h = [\,0\,;+\infty\,[.$

Posons: $h = \dfrac{h_1}{h_2}$, avec: $h_1(x) = x$ et $h_2(x) = e^{x}$.

h_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

h_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Par conséquent, h est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$, avec: pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $h_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer h' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $h'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$ **(u' x v + u x v')**

$$\Rightarrow\ h'(x) = (1 - x)\,e^{-x}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $h'(x) = (1 - x)\,e^{-x}$.

• **Étudions le sens de variation de h' sur $[\,0\,;+\infty\,[$:**

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

1er cas: $h'(x) = 0$.

$h'(x) = 0$ ssi $x = 1$ (car sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $e^{-x} > 0$).

2ème cas: $h'(x) < 0$.

$h'(x) < 0$ ssi $x > 1$ (car sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $e^{-x} > 0$).

3ème cas: $h'(x) > 0$.

$h'(x) > 0$ ssi $x < 1$ (car sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $e^{-x} > 0$).

Au total: • h est croissante sur $[\,0\,;1\,]$,

(car sur $[\,0\,;1\,]$, $h'(x) \geq 0$)

• h est décroissante sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

(car sur $[\ 1 ; +\infty\ [$, $h'(x) \leqslant 0$)

• **Tableau de variation**:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = h(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = h(1) \Rightarrow b = e^{-1}$,

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) \Rightarrow c = 0$.

3. a. Vérifions que pour tout $x \in [\ 0 ; +\infty\ [$, $h(x) = e^{-x} - h'(x)$:

Nous savons que pour tout $x \in [\ 0 ; +\infty\ [$:

• $h(x) = x e^{-x}$

• $h'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$.

Ainsi: $e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - (1 - x)\, e^{-x}$

$= x e^{-x}$.

Au total, pour tout $x \in [\ 0 ; +\infty\ [$, nous avons bien: $h(x) = e^{-x} - h'(x)$.

3. b. Déterminons une primitive de e^{-x} sur [0; +∞ [:

Une primitive de e^{-x} sur [0; +∞ [est: $-e^{-x}$.

Ainsi, sur [0; +∞ [, e^{-x} admet comme primitive: $-e^{-x}$.

3. c. Déduisons-en une primitive de la fonction h sur [0; +∞ [:

h est continue sur [0; +∞ [, elle admet donc une primitive sur [0; +∞ [cad une fonction H dérivable sur [0; +∞ [avec: $H' = h$.

Ici: $H(x) = \int h(x)\, dx$

$$= \int (e^{-x} - h'(x))\, dx$$

$$= \int e^{-x}\, dx - \int h'(x)\, dx$$

$$= -e^{-x} - h(x).$$

Et nous avons bien, pour tout $x \in [\,0; +\infty\,[$: $H'(x) = e^{-x} - h'(x)$.

Au total, sur [0; +∞ [, une primitive de h est:

$H(x) = -e^{-x} - h(x)$ ou $H(x) = -(1 + x)\,e^{-x}$.

Partie B:

1. a. Déterminons la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donnons cette distance:

Nous savons que pour tout $x \in [\,0; +\infty\,[$:

- $f(x) = x e^{-x} + \ln(x + 1) \iff f(x) = h(x) + \ln(x + 1)$,
- $g(x) = \ln(x + 1) \iff g(x) = f(x) - h(x)$.

La distance MN est maximale quand $f(x) - g(x)$ est maximale, ce qui revient à dire quand: h (x) est maximale.

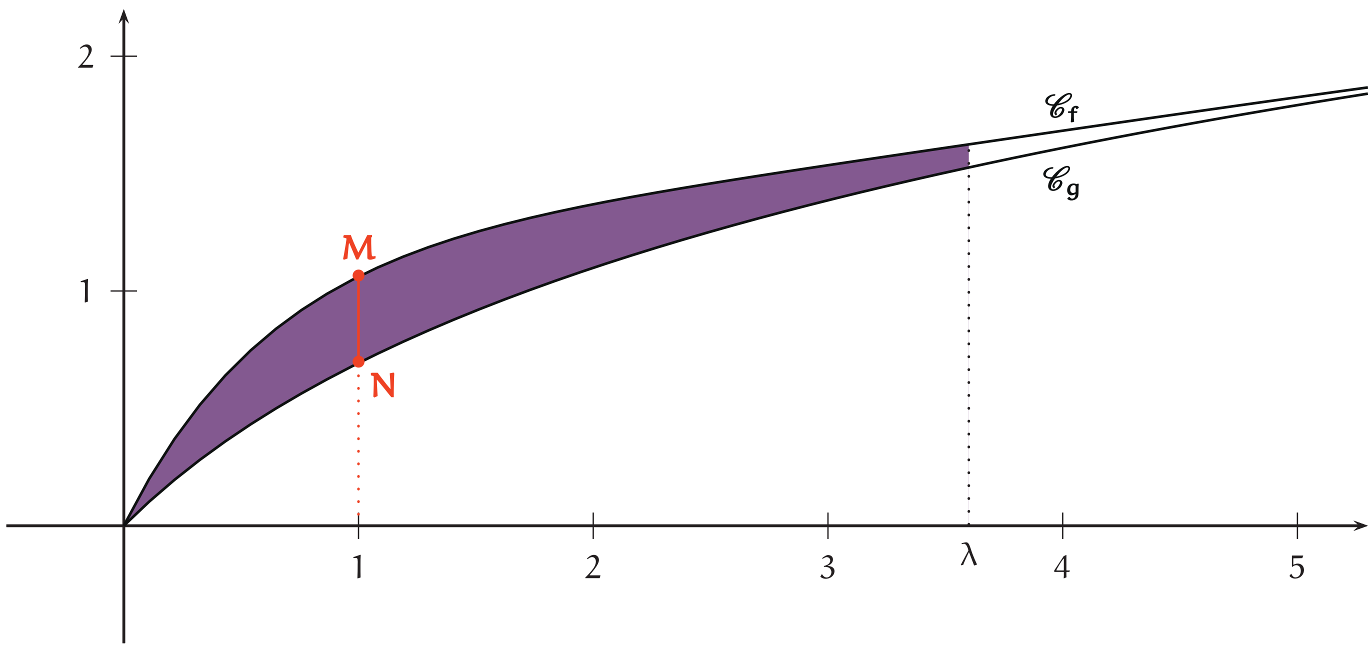
Or h (x) est maximale quand: $x = 1$ (d'après 2.).

Au total: • la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale est: $x = 1$,

• la distance maximale est: $h(1) = e^{-1}$.

1. b. Plaçons sur le graphique, les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN:

Nous pouvons représenter les points M et N demandés sur le graphique suivant:



Notons que les coordonnées des points M et N sont respectivement:

$M(1; f(1))$ cad $M(1; e^{-1} + \ln(2))$ et $N(1; g(1))$ cad $N(1; \ln(2))$.

2. a. Hachurons le domaine D_λ :

Fait sur graphique précédent.

2. b. Démontrons que $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \dfrac{(\lambda + 1)}{e^\lambda}$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ du domaine délimité par les courbes Cf et Cg et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$, est telle que:

$$\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\, dx.$$

Or: $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\, dx$ <=> $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (h(x))\, dx$

<=> $\mathcal{A}_\lambda = [\, H(x)\,]_0^\lambda$ (d'après 3.)

<=> $\mathcal{A}_\lambda = [\, -(1 + x)\, e^{-x}\,]_0^\lambda$

=> $\mathcal{A}_\lambda = 1 - (1 + \lambda)\, e^{-\lambda}$.

Au total, nous avons bien: $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \dfrac{(1 + \lambda)}{e^\lambda}$.

2. c. Calculons la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ en $+\infty$ et interprétons le résultat:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda = \lim_{\lambda \to +\infty} 1 - \frac{(1 + \lambda)}{e^\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} 1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}.$$

Or:
- $\lim_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{e^\lambda} = 0$ (d'après le cours),
- $\lim_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda}{e^\lambda} = 0$ (d'après le Théorème des croissances comparées).

D'où: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}_\lambda = 1.$

Au total: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}_\lambda = 1$ u.a.

Cela signifie que quand λ tend vers l'infini (" λ " très grand), l'aire de la zone hachurée $\mathscr{A}_\lambda$ tendra vers 1 u.a.

3. a. Déterminons la valeur affichée (de λ) par l'algorithme quand $S = 0,8$:

A l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, nous trouvons:

- quand $\lambda = 2$, $\mathscr{A}_2 < 0,8$ $\left(\mathscr{A}_2 = 1 - \frac{3}{e^2}\right)$
- quand $\lambda = 3$, $\mathscr{A}_3 \geqslant 0,8$ $\left(\mathscr{A}_3 = 1 - \frac{4}{e^3}\right)$.

Au total, la valeur affichée par l'algorithme quand $S = 0,8$ est: $\lambda = 3$.

3. b. Déterminons le rôle de cet algorithme:

Le rôle de cet algorithme est d'afficher la première valeur entière de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda \geqslant S$.