

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



# ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

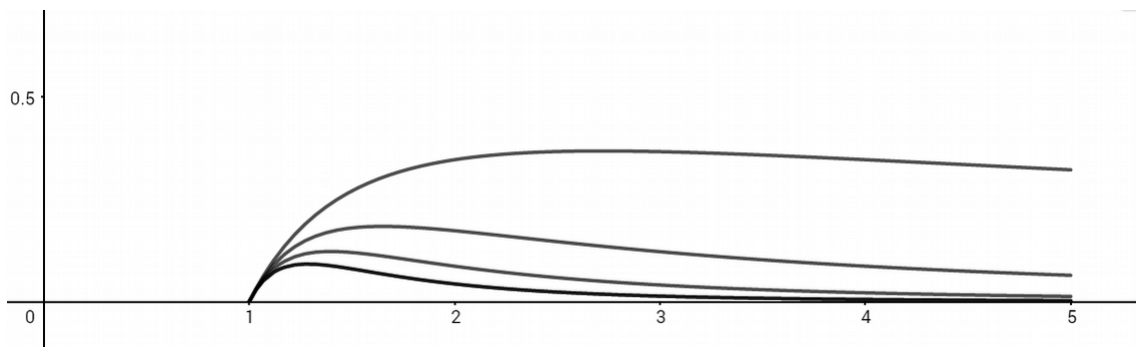
# FONCTION

On considère, pour tout entier  $n > 0$ , les fonctions  $f_n$  définies sur l'intervalle  $[1 ; 5]$  par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}.$$

Pour tout entier  $n > 0$ , on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes  $\mathcal{C}_n$  pour  $n$  appartenant à  $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ .



1. Montrer que, pour tout entier  $n > 0$  et tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 5]$  :

$$f'_n(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier  $n > 0$ , on admet que la fonction  $f_n$  admet un maximum sur l'intervalle  $[1 ; 5]$ .  
On note  $A_n$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_n$  ayant pour ordonnée ce maximum.  
Montrer que tous les points  $A_n$  appartiennent à une même courbe  $\Gamma$  d'équation

$$y = \frac{1}{e} \ln(x).$$

- 3.a) Montrer que, pour tout entier  $n > 1$  et tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 5]$  :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

- b) Montrer que pour tout entier  $n > 1$  :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

- c) Pour tout entier  $n > 0$ , on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe  $\mathcal{C}_n$ , c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations  $x = 1$ ,  $x = 5$ ,  $y = 0$  et la courbe  $\mathcal{C}_n$ .

Déterminer la valeur limite de cette aire quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .