

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION

On considère la suite  $(I_n)$  définie par  $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul  $I_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx$ .

1. Montrer que  $I_0 = \ln(2)$ .

2. a. Calculer  $I_0 - I_1$ .

b. En déduire  $I_1$ .

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ .

b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel  $n$  donné, la valeur de  $I_n$ .

4. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On admet que si  $x$  appartient à l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  alors  $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ .

b. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

5. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $S_n = I_0 - I_n$ .

b. Déterminer la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .