

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

«**ln**» : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1.  $f$  peut-elle être une fonction polynôme du second degré ?

Soit  $h$  une fonction polynôme du second degré définie sur  $]0; 1]$  par:

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec: } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = c. \quad (\neq -\infty)$

Or:  $c \in \mathbb{R}$  et est un nombre fini, donc différent de " $-\infty$ ".

Ainsi:  $f$  ne peut donc pas être une fonction polynôme du second degré.

2. a. Déterminons le réel  $k$  pour que la fonction respecte les trois conditions:

Ici: •  $g(x) = k \ln(x)$

•  $Dg = ]0; 1]$ .

Pour rappel, les conditions sont: (1)  $g(1) = 0,$

(2)  $g'(1) = 0,25,$

(3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty.$

La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme fonction "ln", donc dérivable sur l'intervalle  $]0; 1[$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $g'$  sur  $]0; 1[$ .

Pour tout  $x \in ]0; 1[$ :  $g'(x) = \frac{k}{x}$ .

Vérification des trois conditions:

•  $g(1) = 0$  ssi  $k \times 0 = 0$  cad ssi:  $k \in \mathbb{R}$ .

•  $g'(1) = 0,25$  ssi  $\frac{k}{1} = 0,25$  cad ssi:  $k = 0,25$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$  ssi:  $k > 0$ . (car:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ )

Ainsi, les trois conditions sont réunies ssi:  $k = 0,25$ .

Et nous pouvons écrire pour tout  $x \in ]0; 1[$ :  $g(x) = 0,25 \ln x$ .

2. b. La courbe représentative de  $g$  coïncide-t-elle avec celle de  $f$  ?

Non, la courbe représentative de  $g$  ne coïncide pas avec celle de  $f$ .

En effet, pour le prouver, il suffit de prendre un contre-exemple:

quand  $x = 0,5$ :  $f(x) = 0,75$  et  $g(x) = 0,25 \times \ln(0,5) \neq 0,75$ .

Ainsi: non, la courbe représentative de  $g$  ne coïncide pas avec celle de  $f$ .

3. Déterminons les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $h$  vérifie les trois conditions:

Ici: •  $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

•  $D_h = ]0; 1[$ .

## 2. a. Déterminons sa fonction dérivée:

Ici: •  $u(x) = \frac{1}{2x^2}$

•  $D_u = ]0; 1]$ .

La dérivée de la fonction  $u$  sur  $]0; 1]$  est:  $u'(x) = \frac{-1}{x^3} < 0$ .

Ainsi, pour tout  $x \in ]0; 1]$ :  $u'(x) = \frac{-1}{x^3}$ .

## 2. b. Déterminons la valeur exacte et une valeur approchée de $V$ :

D'après l'énoncé:  $V = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 f'(x) dx$ .

D'où:  $V = \pi \int_{\alpha}^1 x^2 x \left( \frac{1}{20} \left( 1 + \frac{4}{x^5} \right) \right) dx$

$$= \frac{\pi}{20} \int_{\alpha}^1 \left( x^2 + 4x \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{20} \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \frac{1}{2x^2} \right]_{\alpha}^1$$

$$= \frac{\pi}{20} \left( -\frac{5}{3} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{\alpha^2} \right)$$

$$\approx 2,8 \text{ cm}^3. \quad (\text{avec: } \alpha \approx 0,32)$$

Au total: • la valeur exacte de  $V$  est  $\frac{\pi}{20} \left( -\frac{5}{3} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{\alpha^2} \right)$ ,

• une valeur approchée de  $V$  est  $2,8 \text{ cm}^3$ .

La dérivée de la fonction  $h$  sur  $]0; 1]$  est:  $h'(x) = \frac{-4a}{x^5} + b$ .

Vérification des trois conditions:

- $h(1) = 0$  ssi  $\frac{a}{1} + b \times 1 = 0$  cad ssi:  $a = -b$ .
- $h'(1) = 0,25$  ssi  $\frac{-4a}{(1)^5} + b = 0,25$  cad ssi:  $-4a + b = 0,25$ .
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$  ssi:  $a < 0$ .

Par conséquent, les trois conditions sont réunies ssi:

$$\begin{cases} a = -b \\ -4a + b = 0,25 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,05 < 0 \\ b = 0,05 \end{cases}$$

Au total, les réels  $a$  et  $b$  demandés sont:  $a = -0,05$  et  $b = 0,05$ .

Et nous pouvons écrire pour tout  $x \in ]0; 1]$ :  $h(x) = \frac{-0,05}{x^4} + 0,05x$ .

## Partie B:

1. a. Justifions que l'équation  $f(x) = -5$  admet sur  $]0; 1]$  une unique solution  $\alpha$ :

ici: •  $f(x) = \frac{1}{20} \left( x - \frac{1}{x^4} \right)$

•  $Df = ]0; 1]$ .

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour pouvoir répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $k$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = k$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Or ici: •  $f$  est continue sur  $]0; 1]$ .

- " $k = -5$ " est compris entre:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty < 0$

$$\text{et: } f(1) = 0.$$

- $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1]$ .

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = -5$  ( $k = -5$ ) admet une **unique** solution notée  $\alpha$  appartenant à  $]0; 1]$ .

**Au total:**  $f(x) = -5$  admet exactement une solution unique  $\alpha$  sur  $]0; 1]$ .

1. b. Déterminons une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de " $\alpha$ ":

A l'aide d'une machine à calculer:  $\alpha \approx 0,32$ .

Ainsi une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $\alpha$  est environ:  $0,32 \in ]0; 1]$ .