Spé Maths
Terminale

« ln » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC LN 1

CORRECTION

1. **L'affirmation 1 est**: **Vraie**.

En effet, l'équation réduite de la tangente à Cf au point A d'abscisse $x_A = 1$ s'écrit: $\boldsymbol{y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)}$

$$= f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or ici:
- $f(x) = 3\ln(x) - 2x + 1$,
- $Df =]\,0\,; +\infty\,[$,
- $A(1; f(1))$ **cad**: $A(1; -1)$,
- $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 2$, pour tout $x \in]\,0\,; +\infty\,[$.

Dans ces conditions: $y = \left(\dfrac{3}{1} - 2\right)(x - 1) + (-1)$

cad: $\boldsymbol{y = x - 2}$.

Au total: **$y = x - 2$ est l'équation réduite de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.**

2. **L'affirmation 2 est**: **Vraie**.

En effet, d'après le cours, $f(x) = \dfrac{1}{e^2}\ln(x)$ est une fonction de densité sur $[\,e\,; e^2\,]$ ssi:

- f est continue sur $[\,e\,; e^2\,]$,

• pour tout $x \in [\, e ; e^2 \,]$, $f(x) \geqslant 0$,

• $\displaystyle\int_{e}^{e^2} f(x)\, dx = 1$.

Or ici: • **f est continue sur $[\, e ; e^2 \,]$.**

• Pour tout $x \in [\, e ; e^2 \,]$:

$x \geqslant e \iff \ln x \geqslant \ln e$

$\iff \ln x \geqslant 1$

$\iff \dfrac{\ln x}{e^2} \geqslant \dfrac{1}{e^2}$

$\iff \dfrac{1}{e^2} \ln x \geqslant 0$

$\iff$ **$f(x) \geqslant 0$** (**pour tout x $[\, e ; e^2 \,]$**).

• $\displaystyle\int_{e}^{e^2} f(x)\, dx = \int_{e}^{e^2} \frac{1}{e^2} \ln(x)\, dx$

$= \dfrac{1}{e^2} \left[\, x \ln(x) - x \,\right]_{e}^{e^2}$

$= \dfrac{1}{e^2} \left(e^2 \ln(e^2) - e^2 - (e \ln(e) - e)\right)$

$= \dfrac{1}{e^2} \left(2e^2 - e^2 - (e - e)\right)$.

D'où: $\displaystyle\int_{e}^{e^2} f(x)\, dx = 1$.

Au total: f **est une fonction de densité sur $[\, e ; e^2 \,]$.**