Spé Maths
Terminale

Exponentielle exp(x)

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

2 ÉGALITÉS À DÉMONTRER

CORRECTION

1. Montrons l'égalité demandée pour tout réel x:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) \times \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \times e^x}{(e^x - e^{-x}) \times e^x}$$

$$= \frac{e^x \times e^x + e^{-x} \times e^x}{e^x \times e^x - e^{-x} \times e^x}$$

$$= \frac{e^{(x+x)} + e^{(-x+x)}}{e^{(x+x)} - e^{(-x+x)}}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^0}{e^{2x} - e^0}, \quad \text{avec: } e^0 = 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$.

2. Montrons que pour tout réel x, $f' = 1 - f^2$:

Soit $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x + e^{-x} \neq 0$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \times (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \times (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \quad \left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$

$$= 1 - [\,f(x)\,]^2.$$

Au total, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $f'(x) = 1 - [\,f(x)\,]^2$.