

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Donnons l'encadrement demandé:

A l'aide du premier graphique, à savoir celui de la courbe représentative de f , la fonction f semble atteindre son maximum (M) quand: $1 < x < 2$.

Au total, l'encadrement demandé est: $1 < x < 2$.

2. a. Donnons un intervalle défini par deux entiers sur lequel f semble convexe:

Soit $[e; f]$, l'intervalle recherché.

f est convexe sur $[e; f]$ ssi: pour tout $x \in [e; f]$, $f''(x) \geq 0$.

A l'aide du troisième graphique, à savoir celui de la courbe représentative de f'' , la fonction f semble convexe sur: $[2; 5]$.

Au total, l'intervalle sur lequel f semble convexe est: $[2; 5]$.

2. b. b1. Expliquons pourquoi on peut conjecturer que la courbe C_f admet un point d'inflexion:

Nous pouvons conjecturer le fait que la courbe C_f admet un point d'inflexion car: la dérivée seconde s'annule et change de signe.

En effet, ici, à l'aide du troisième graphique: la dérivée seconde semble s'annuler et changer de signe quand $x \in]2; 3[$.

2. b. b2. Donnons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion:

Soit x_I , l'abscisse du point d'inflexion, x_I est tel que: $2 < x_I < 3$.

3. Déterminons l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0:

L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = 0$ est:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Par lecture du premier et second graphiques: $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$.

Dans ces conditions, l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = 0$ est: $y = 2x$.

4. Comment interpréter graphiquement ce nombre I ?

Ce nombre I s'interprète comme suit: I correspond, en unités d'aire et à l'unité près, à l'aire du domaine compris entre la courbe ($C_{f'}$), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Notons que: $0 < I < 1$.

Freemaths: Tous droits réservés

Partie B:

1. a. Montrons que pour tout $x \in [0; 5]$, $f'(x) = (-x^2 + 2) e^{-x}$:

Ici: $f(x) = (x^2 + 2x) e^{-x}$ (u x v)

$Df = [0; 5]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 + 2x$ et $f_2(x) = e^{-x}$.

f est dérivable sur $[0; 5]$ car f_1 et f_2 sont dérivables sur $[0; 5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 5]$.

Pour tout $x \in [0; 5]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2) \times (e^{-x}) + (x^2 + 2x) \times (-e^{-x}) && (u' \times v + u \times v') \\ &= 2x e^{-x} + 2e^{-x} + (-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x}) \\ &= 2 e^{-x} - x^2 e^{-x} \quad \text{ou:} \quad (-x^2 + 2) e^{-x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [0; 5]$, nous avons bien: $f'(x) = (-x^2 + 2) e^{-x}$.

1. b. b1. Déterminons les variations de f sur $[0; 5]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 5]$:

• **1^{er} cas:** $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-x^2 + 2) e^{-x} = 0, \text{ cad: } x = \sqrt{2} \in [0; 5].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$)

• **2^{ème} cas:** $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-x^2 + 2) e^{-x} < 0, \text{ cad: } x \in]\sqrt{2}; 5].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$)

• **3^{ème} cas:** $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-x^2 + 2) e^{-x} > 0, \text{ cad: } x \in [0; \sqrt{2}[.$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[0; \sqrt{2}]$,

(car sur $[0; \sqrt{2}]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\sqrt{2}; 5]$.

(car sur $[\sqrt{2}; 5]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons alors dresser le tableau de variation suivant:

x	0	$\sqrt{2}$	5		
f'		+	0	-	
f			a	b	c

Diagramme du tableau de variation : une flèche part de a (à $x=0$) vers b (à $x=\sqrt{2}$), et une autre flèche part de b vers c (à $x=5$).

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(\sqrt{2}) \Rightarrow b = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$,

• $c = f(5) \Rightarrow c = 35e^{-5}$.

1. b. b2. Précisons l'abscisse du maximum de f :

D'après le tableau de variation précédent, nous pouvons dire que:

l'abscisse du maximum de f est $x_M = \sqrt{2}$.

Ainsi le maximum de f a pour coordonnées: $(\sqrt{2}; (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}})$.

1. c. Donnons la valeur arrondie au millième du maximum de f :

Les valeurs arrondies au millième des coordonnées du maximum de f sont:

$$x_M \approx 1,414 \text{ et } y_M \approx 1,174.$$

2. Ces deux valeurs sont-elles égales ?

• $\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1$

$$= f(1) - f(0)$$

$$= f(1), \text{ car: } f(0) = 0.$$

- $f(1) = f(1)$, par définition.

Donc: oui ces deux valeurs sont égales.