Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2\,;0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

   b) En déduire le plus grand intervalle dans $[-2\,;\,4]$ sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2\,;4]$ par $G(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.

   b) En déduire une primitive F de f.

6. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe.

   b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathcal{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

   c) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée au centième.

ANNEXE