

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que, pour tout $x \in [-2; 4]$, $f'(x) = -4x e^{-2x}$:

Ici: • $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$ $(u \times v) + 3$

• $Df = [-2; 4]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = e^{-2x}$ et $f_3(x) = 3$.

f est dérivable sur $[-2; 4]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[-2; 4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2; 4]$.

Pour tout $x \in [-2; 4]$:

$$f'(x) = (2) \times (e^{-2x}) + (2x + 1) \times (-2e^{-2x}) \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$= 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} - 2e^{-2x}$$

$$= -4xe^{-2x}.$$

Au total, pour tout $x \in [-2; 4]$: $f'(x) = -4xe^{-2x}$.

2. Etudions les variations de f :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2; 4]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -4xe^{-2x} = 0, \text{ cad: } x = 0.$$

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-4xe^{-2x} < 0$, cad: $x \in]0; 4]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-4xe^{-2x} > 0$, cad: $x \in [-2; 0[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[-2; 0]$,

(car sur $[-2; 0]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[0; 4]$.

(car sur $[0; 4]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-2	0	4
f'	+	0	-
f	a	b	c

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^4 + 3$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. a. Montrons que sur $[-2; 0]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[-2; 0]$, donc sur $[-2; 0[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-2) = -3e^4 + 3$

et: $f(0) = 4$.

• f est strictement croissante sur $[-2; 0[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une **unique** solution α appartenant à $[-2; 0[$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[-2; 0[$.

3. b. Donnons une valeur approchée au dixième de cette solution:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\alpha \approx -0,8$.

Au total: $\alpha \approx -0,8$.

4. a. Etudions le signe de f'' sur $[-2; 4]$:

Ici: • $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$

• $Df = [-2; 4]$

• $f''(x) = (8x - 4)e^{-2x}$.

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2; 4]$, sachant que: $e^{-2x} > 0$.

• 1^{er} cas: $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0$ ssi $(8x - 4)e^{-2x} = 0$, cad: $x = \frac{1}{2}$.

• 2^{ème} cas: $f''(x) < 0$.

$f''(x) < 0$ ssi $(8x - 4)e^{-2x} < 0$, cad: $x \in [-2; \frac{1}{2}[$.

• 3^{ème} cas: $f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$ ssi $(8x - 4)e^{-2x} > 0$, cad: $x \in]\frac{1}{2}; 4]$.

D'où le tableau de signes de f'' sur $[-2; 4]$ suivant:

x	-2	$\frac{1}{2}$	4
f''	-	0	+

4. b. Déduisons-en le plus grand intervalle sur lequel f est convexe:

Soit $[e; f]$, l'intervalle recherché.

f est convexe sur $[e; f]$ ssi: pour tout $x \in [e; f]$, $f''(x) \geq 0$.

Or: $f''(x) \geq 0$ quand $x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

Au total, le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est: $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

5. a. Vérifions que G est bien une primitive de la fonction g :

Sur l'intervalle $[-2; 4]$, G est une primitive de g ssi: $G'(x) = g(x)$.

Ici: $G(x) = (-x - 1)e^{-2x}$ (u x v).

D'où: $G'(x) = (-1) \times (e^{-2x}) + (-x - 1) \times (-2e^{-2x})$ (u' x v + u x v')

$$= -e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 2e^{-2x}$$

$$= 2xe^{-2x} + e^{-2x} \text{ ou: } (2x + 1)e^{-2x}.$$

Au total: G est bien une primitive de g sur $[-2; 4]$.

5. b. Déduisons-en une primitive F de f :

Notons que sur $[-2; 4]$: $f(x) = g(x) + 3$.

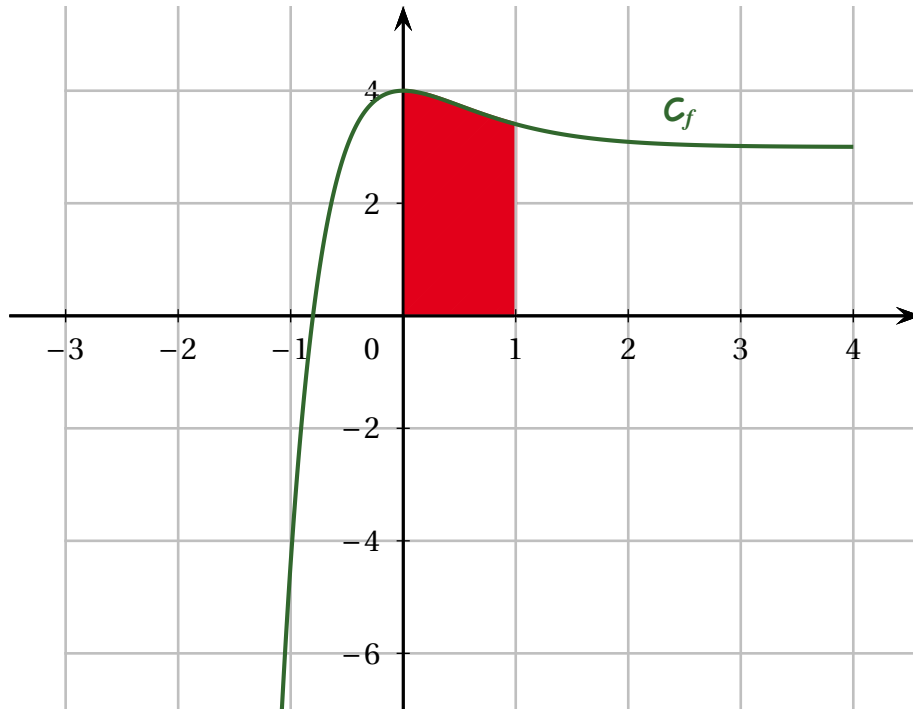
Dans ces conditions, une primitive F de f sur l'intervalle $[-2; 4]$ est:

$$F(x) = G(x) + 3x \text{ cad: } F(x) = (-x - 1)e^{-2x} + 3x.$$

Au total: $F(x) = (-x - 1)e^{-2x} + 3x$ est une primitive de la fonction f .

6. a. Colorions le domaine \mathcal{D} sur le graphique:

Le domaine \mathcal{D} colorié en rouge sur le graphique est le suivant:



6. b. A l'aide du graphique, donnons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire \mathcal{A} :

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire \mathcal{A} du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, est telle que: $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$.

Au total, l'aire demandée \mathcal{A} est telle que: $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$.

6. c. c1. Calculons la valeur exacte de \mathcal{A} :

Ici, il s'agit de calculer: $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx$.

Or: $\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$.

Dans ces conditions: $\mathcal{A} = (-2e^{-2} + 3) - (-1)$
 $= 4 - 2e^{-2}$.

Au total, la valeur exacte de \mathcal{A} est: $\mathcal{A} = 4 - 2e^{-2}$.

6. c. c2. Calculons une valeur approchée de \mathcal{A} :

A l'aide d'une machine à calculer, une valeur approchée de \mathcal{A} est:

$$\mathcal{A} \approx 3,73.$$

Au total, une valeur approchée de \mathcal{A} est: $\mathcal{A} \approx 3,73$ au centième.