

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons la dérivée f' de f :

Ici: • $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8) e^{-0,5x}$ $(1 + u \times e^v)$

• $Df = [-4; 10]$.

f est dérivable sur $[-4; 10]$, nous pouvons donc calculer sa dérivée f' .

Pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = 0 + (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5e^{-0,5x})$$

$$(0 + u' \times e^v + u \times v' \times e^v)$$

$$= (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (2x^2 + 5x - 4) \times (e^{-0,5x})$$

$$= (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x}.$$

Au total, pour tout $x \in [-4; 10]$, nous avons bien: $f'(x) = (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x}$.

2. Dressons le tableau des variations de f sur $[-4; 10]$:

Préalablement, résolvons l'équation: $2x^2 - 3x - 14 = 0$ (1).

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-14) \text{ cad: } \Delta = 121 = (11)^2 > 0.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

$$\bullet x_1 = \frac{3 - 11}{4} \text{ cad: } x_1 = -2,$$

$$\bullet x_2 = \frac{3+11}{4} \text{ cad: } x_2 = 3,5.$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$\bullet 1^{\text{er}} \text{ cas: } f'(x) \leq 0.$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 3x - 14 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \in [-2; 3,5].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-0,5x} > 0$)

$$\bullet 2^{\text{ème}} \text{ cas: } f'(x) \geq 0.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 3x - 14 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \in [-4; -2] \cup [3,5; 10].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-0,5x} > 0$)

Au total: • f est décroissante sur $[-2; 3,5]$,

• f est croissante sur $[-4; -2] \cup [3,5; 10]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

| | | | | | |
|------|-------------|----|-------|-----|-------|
| x | -4 | -2 | | 3,5 | 10 |
| f' | + | 0 | - | 0 | + |
| f | ↗ a → b | | ↘ c | | ↗ d |

$$\text{Avec: } \bullet a = f(-4) = 1 - 16 e^2,$$

$$\bullet b = f(-2) = 1 + 12 e,$$

$$\bullet c = f(3,5) = 1 - 76 e^{-\frac{7}{2}},$$

$$\bullet d = f(10) = 1 - 492 e^{-5}.$$

3. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-4; -2]$:

$$\text{Sur } [-4; -2], f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + (-4x^2 - 10x + 8) e^{-0,5x} = 0.$$

Or, nous ne pouvons pas résoudre cette équation.

Donc nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à la question demandée.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[-4; 10]$, donc sur $[-4; -2]$.

- " $k = 0$ " est compris entre: $f(-4) = 1 - 16 e^2 < 0$

$$\text{et: } f(-2) = 1 + 12 e > 0.$$

- f est strictement croissante sur $[-4; -2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une **unique** solution α appartenant à $[-4; -2]$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[-4; -2]$.

3. b. Recopions et complétons la seconde ligne du tableau:

La seconde ligne du tableau recopiée et complétée est la suivante:

| | m | signe de p | a | b | $b - a$ | $b - a > 10^{-1}$ |
|--|------|--------------|------|-----|---------|-------------------|
| Après le 2 ^e passage dans la boucle | -3,5 | Positif | -3,5 | -3 | 0,5 | VRAI |

3. c. Interprétons les résultats:

Cela signifie que la solution α de l'équation $f(x) = 0$ est telle que:

$$-3,1875 \leq \alpha \leq -3,125.$$

4. Calculons la valeur moyenne de f sur $[-4; 10]$:

D'après le cours, la valeur moyenne m de f sur $[-4; 10]$ est telle que.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10 - (-4)} \int_{-4}^{10} f(x) dx \\ &= \frac{1}{14} \times [F(x)]_{-4}^{10} \\ &= \frac{1}{14} \times [x + (8x^2 + 52x + 88) e^{-0,5x}]_{-4}^{10} \\ &\approx -2,54, \text{ arrondie au centième.} \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[-4; 10]$ est d'environ: $-2,54$.