# Spé Maths
## Terminale

## « exp » : Études de fonctions

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION AVEC EXPONENTIELLE 37

## CORRECTION

### Partie A:

**1. Étudions le sens de variation de $f$ sur $[0;1]$:**

• **Calculons $f'$:**

Ici: • $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1-x}}$

• $Df = [0;1]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_1 + f_2}$, avec: $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = e^{1-x}$.

$f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0;1]$.

$f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;1]$.

Par conséquent, $h = f_1 + f_2$ est dérivable sur $[0;1]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;1]$.

Dans ces conditions, $f$ est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{h}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;1]$, avec: pour tout $x \in [0;1]$, $h(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f'$ pour tout $x \in [0;1]$.

Pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) = \dfrac{0 \times (1+e^{1-x}) - 1 \times (-e^{1-x})}{(1+e^{1-x})^2}$ => $f'(x) = \dfrac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$.

Au total: pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \dfrac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$.

• **Étudions le signe de $f'$ sur $[0;1]$:**

Pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) > 0$.

Ainsi: pour tout $x \in [0;1]$, $f$ est strictement croissante.

• **Dressons le tableau de variation de $f$ sur $[0;1]$:**

Nous avons le tableau de variation suivant:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | |
| $f$ | $a$ ↗ | $b$ |

Avec: • $a = f(0)$ => $a = \dfrac{1}{1+e}$,

• $b = f(1)$ => $b = 1$.

**2. Montrons que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e}$:**

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}} \iff f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \left(\frac{1}{1+e^{1-x}}\right)$$

$$\iff f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^x \times e^{1-x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}.$$

Au total, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons bien: $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+e}$.

3. **Montrons que $\int_0^1 f(x)dx = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$:**

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 f(x)dx$.

$f$ est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: $I$ existe.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{1-x}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)}dx, \quad \text{avec:} \quad U(x) = e^x + e$$

$$= [\ln|U(x)|]_0^1$$

$$= [\ln|e^x + e|]_0^1$$

$$= [\ln(e^x + e)]_0^1, \quad \text{car sur } [0;1]: \quad e^x + e > 0$$

$$= \ln(2e) - \ln(1+e)$$

$$\Rightarrow \quad I = \ln(2) + \ln(e) - \ln(1+e).$$

Au total, nous avons bien: $I = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$.

## Partie B:

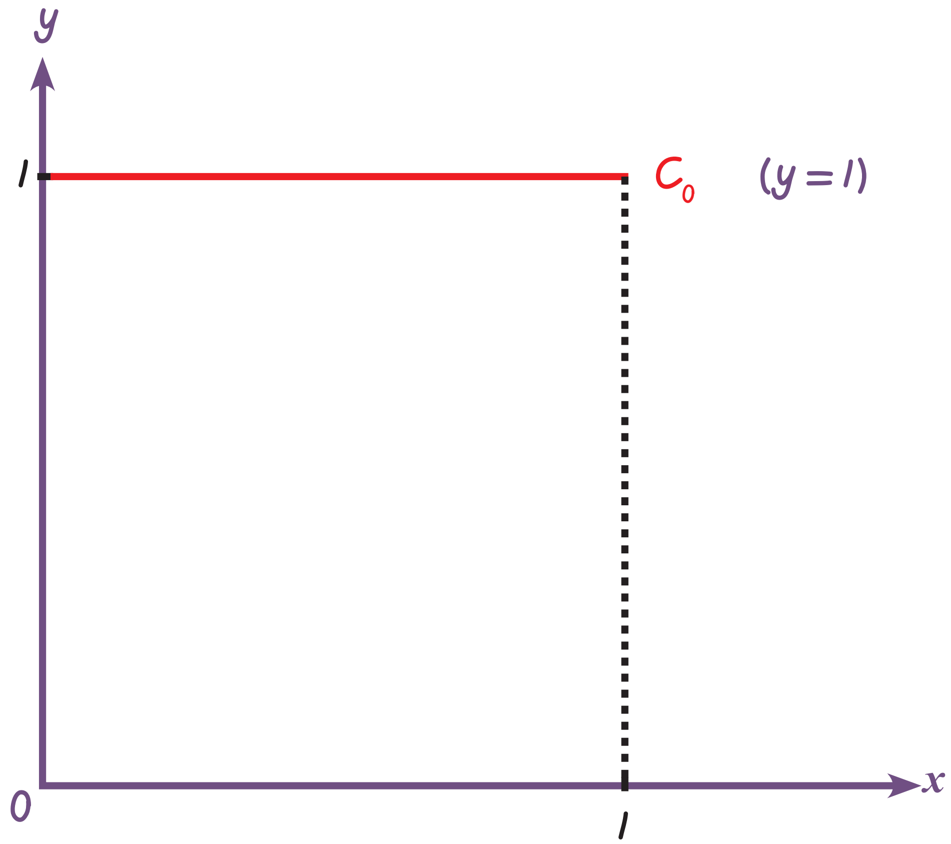
1. **Courbe représentative $C_0$ de la fonction $f_0$:**

Soit $n = 0$; la fonction $f_0$ définie sur $[0,1]$ est:

$$f_0(x) = \frac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} \quad \Rightarrow \quad f_0(x) = 1.$$

La courbe représentative $C_0$ a donc pour équation: $y = 1 \;\; (x \in [0,1])$.

D'où le graphique suivant:






**2. Interprétons graphiquement $U_n$ et calculons $U_0$:**

- D'après l'énoncé, nous avons:

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx, \quad \text{avec: } f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel n: $ne^{1-x} > 0$.

Dans ces conditions: $\dfrac{1}{1 + ne^{1-x}} > 0 \iff f_n(x) > 0.$

Ainsi: $U_n$ représente l'aire sous la courbe $C_n$ délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation: $x = 0$ et $x = 1$.

- $U_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx \iff U_0 = \int_0^1 \dfrac{1}{1+0}\,dx$

$$\Longleftrightarrow \quad U_0 = \int_0^1 dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad U_0 = [\,x\,]_0^1$$

$$\Longrightarrow \quad U_0 = 1.$$

Au total: $\int_0^1 f_0(x)\,dx = 1.$

**3. Déterminons la conjecture quant au sens de variation de la suite $(U_n)$ et démontrons là:**

- La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la suite $(U_n)$ est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite $(U_n)$ est strictement décroissante ".

De plus, $(U_n)$ est positive et semble converger vers " 0 " (minorant).

- $(U_n)$ strictement décroissante ?

Il s'agit de déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 + (n+1)e^{1-x}}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + ne^{1-x}}$.

Notons:
- les fonctions $f_{n+1}$ et $f_n$ sont continues sur $[0,1]$;
- elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$, et par conséquent:

(a) $$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx \text{ existent ;}$$

- de plus, les fonctions $f_{n+1}$ et $f_n$ sont positives sur $[0,1]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,1]$, nous avons:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(1 + ne^{1-x}) - (1 + (n+1)e^{1-x})}{(1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x})]= D}$$

$$= \frac{-e^{1-x}}{D} < 0.$$

Donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ car $D > 0$ et $-e^{1-x} < 0$.

Par ailleurs, comme les conditions (a) sont toutes réunies, nous pouvons écrire:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

$$\iff \int_0^1 f_{n+1}(x)dx < \int_0^1 f_n(x)dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < U_n.$$

Comme $U_{n+1} < U_n$, $(U_n)$ est bien une suite strictement décroissante.

**4. Déterminons la limite de la suite $(U_n)$:**

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- $(U_n)$ est minorée par $m = 0$, $\left( \int_0^1 f_n(x)dx > 0 \right)$
- $(U_n)$ est décroissante, pour tout entier naturel $n$.

Donc nous pouvons affirmer que $(U_n)$ est convergente.

Et par conséquent, la suite $(U_n)$ admet une limite finie.