Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

36

CORRECTION

Partie A : Étude de fonction

1. Déterminons à quel instant la vitesse est maximale :

D'après l'énoncé, à un instant $t \geqslant 0$, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est $C'(t)$.

Or, $C'(t)$ correspond à la pente de la tangente aux courbes C_1 et C_2, en un point donné d'abscisse t.

Graphiquement, cette dernière est maximale quand :

- $t = 0$, pour C_1
- $t = 0$, pour C_2.

En définitive, dans les 2 cas, la vitesse est maximale quand : $t = 0$.

2. Déterminons la courbe correspondante à la personne la plus corpulente :

Une personne de forte corpulence subit moins vite les effets de l'alcool, donc :

la courbe C_2 correspond à la personne la plus corpulente.

3. a. Déterminons $f'(0)$:

Ici : • $f(t) = A\,t\,e^{-t}$

• $Df = [0 ; +\infty[$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(t) = A.t$ et $f_2(t) = e^{-t}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) = (A \times e^{-t}) + (A \times t \times (-e^{-t}))$

$\Rightarrow f'(t) = A\, e^{-t}\,(1 - t)$.

Dans ces conditions: $f'(0) = A$.

Au total: $f'(0) = A$.

3. b. L'affirmation est-elle vraie ?

FAUX: d'après la question 2.

Partie B: Un cas particulier

1. Étudions les variations de f sur $[0;+\infty[$:

Ici: • $A = 2$, car: $f(t) = 2te^{-t}$

• $f'(t) = 2e^{-t}(1 - t)$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout t de $[0;+\infty[$.

1er cas: $f'(t) = 0$.

$f'(t) = 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) = 0$

$\iff 1 - t = 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\Rightarrow t = 1$.

2eme cas: $f'(t) < 0$.

$f'(t) < 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) < 0$

$\iff 1 - t < 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\Rightarrow t > 1$ ou $t \in]1;+\infty[$.

3eme cas: $f'(t) > 0$.

$f'(t) > 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) > 0$

$\iff 1 - t > 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\Rightarrow t < 1$ ou $t \in [0;1[$.

Au total: • f est décroissante sur $[1;+\infty[$,

(car sur $[1;+\infty[$, $f'(t) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $[0;1]$.

(car sur $[0;1]$, $f'(t) \geqslant 0$)

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

t	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^{-1}$,

• $c = f(+\infty) \Rightarrow c = 0$.

($\lim_{x \to +\infty} \frac{2t}{e^t} = 0$, d'après le cours)

2. Déterminons l'instant où la concentration d'alcool dans le sang est maximale:

D'après le tableau de variation, la concentration d'alcool dans le sang est maximale quand: $t = 1$.

En conclusion: • la concentration est maximale quand $t = 1$,

• elle est alors égale à $f(1) = \frac{2}{e}$ g/L,

• la concentration maximale, à 10^{-2} près, est alors égale à $f(1) \approx 0,74$ g/L.

3. Rappelons la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, et déduisons-en celle de $f(t)$ en $+\infty$:

D'après le cours: $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$, d'après le théorème des croissances comparées.

Dans ces conditions: $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$.

Et donc: $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 2te^{-t}$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\left(\frac{t}{e^t}\right)$$

$$= 2 \times 0$$

$$= 0.$$

Cela signifie que: quand t est très grand, cad au bout d'un certain temps, il n'y aura plus aucune trace d'alcool dans le sang.

4. a. Montrons qu'il existe 2 réels t_1 et t_2 avec $f(t_1) = f(t_2) = 0$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

  Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici:
- f est continue sur $[0;1[$ et est strictement croissante sur $[0;1[$.
- f est continue sur $[1;+\infty[$ et est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

De plus:
- sur $[0;1[$, " $K = 0,2$ " est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

  En effet: $0 \leqslant 0,2 \leqslant 2e^{-1}$.
- sur $]1;+\infty[$, " $K = 0,2$ " est compris entre $f(c)$ et $f(b)$.

  En effet: $0 \leqslant 0,2 \leqslant 2e^{-1}$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 0,2$ **($K = 0,2$)** admet une solution unique appartenant à $[0;1[$ **et** une solution unique appartenant à $]1;+\infty[$.

Au total: il existe bien 2 nombres t_1 ($t_1 \in [0;1[$) et t_2 ($t_2 \in]1;+\infty[$) qui sont tels que:

$$f(t_1) = f(t_2) = 0,2.$$

4. b. Déterminons la durée minimale avant de pouvoir prendre le volant:

Pour répondre à cette question, nous avons le choix entre t_1 et t_2.

Nous retiendrons t_2 car entre t_1 et t_2, le taux d'alcoolémie est en phase croissante puis décroissante mais dépasse toujours **"0, 2"**.

À l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, on trouve:

$$t_2 \approx 3,578 \text{ heures.}$$

Au total, la durée minimale que Paul doit attendre avant de pouvoir prendre le volant est de: 3, 578 heures cad: 3 heures et 35 minutes.

5. a. Justifions qu'il existe un instant T:

Ici, il s'agit de déterminer **" T "** tel que: $f(T) = 5 \times 10^{-3}$.

Or: $5 \times 10^{-3} \in]1;+\infty[$*.

* car: c'est dans l'intervalle $]1;+\infty[$ que le taux d'alcoolémie diminue.

Or sur $]1;+\infty[$:
- f est continue
- f est strictement décroissante
- **" $K = 5.10^{-3}$ "** est compris entre $f(c)$ et $f(b)$,

  car: $0 \leqslant 5.10^{-3} \leqslant 2e^{-1}$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **oui**, il existe un instant " T " à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

5. b. Recopions et complétons le tableau en exécutant l'algorithme:

Le tableau complété est le suivant:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	$0,25$	$0,25$	$0,25$
t	$3,5$	$3,75$	4
C	$0,21$	$0,18$	$0,15$

Notons que: la valeur affichée par l'algorithme correspond au temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.