

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

- 2.

- a. On admet que f est dérivable sur \mathbf{R} et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x ,

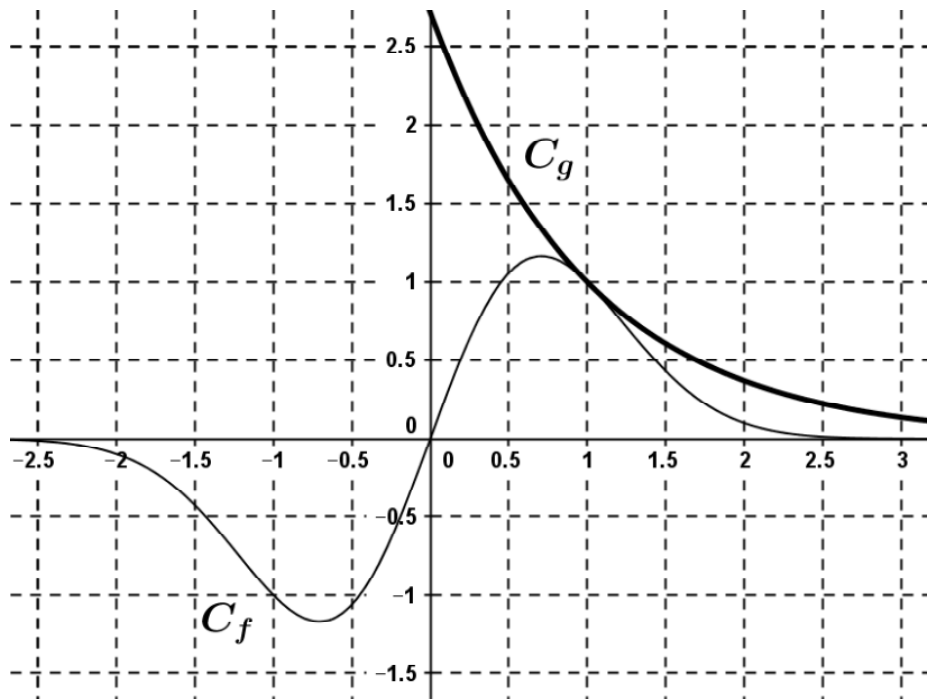
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] - \infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

- a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
 - c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
- 4.
- a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
 - b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.
 - c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur \mathbf{R} .
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.