Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE 34

CORRECTION

Partie A:

1. Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{1-x^2}$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} \quad \left(x e^{1-x^2} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} \right).$$

- Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

• $\lim\limits_{U \to +\infty} \frac{U}{e^U} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Dans ces conditions, en posant $U = x^2$:

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e \times \left(\frac{1}{x} \right)$

$= 0$;

• $\lim\limits_{x^2 \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0.$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times 0$

$= 0.$

Au total: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. a. Démontrons que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$:

Ici: • $f(x) = xe^{1-x^2}$

• $Df = IR$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (1 \times e^{1-x^2}) + (x \times (-2x) \times e^{1-x^2})$

$$\Rightarrow f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

Au total, pour tout $x \in IR$, nous avons bien: $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

2. b. Déduisons-en le tableau de variation de f:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in IR$:

• **1^er^ cas**: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \iff (1 - 2x^2)e^{1-x^2} = 0$$
$$\iff 1 - 2x^2 = 0, \quad \text{car} \quad e^{1-x^2} > 0,$$
$$\iff x^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

• **2^eme^ cas**: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \iff (1 - 2x^2)e^{1-x^2} < 0$$
$$\iff 1 - 2x^2 < 0, \quad \text{car} \quad e^{1-x^2} > 0,$$
$$\iff x^2 > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[.$$

• 3ème cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \iff (1 - 2x^2)e^{1-x^2} > 0$$

$$\iff 1 - 2x^2 > 0, \quad \text{car} \quad e^{1-x^2} > 0,$$

$$\iff x^2 < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[.$$

Au total: • f est décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$,

(car sur cet intervalle, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(car sur cet intervalle, $f'(x) \geqslant 0$)

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	a ↘		b ↗		c ↘		d

Avec: • $a = f(-\infty) \Rightarrow a \to 0$,

• $b = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/2}$,

• $c = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/2}$,

• $d = f(+\infty) \Rightarrow d \to 0$.

Partie B:

1. Quelle conjecture peut-on émettre ?

La conjecture que nous pouvons émettre est:

" la courbe de la fonction g est au dessus de celle de la fonction f " ;

" Donc, a priori, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geqslant f(x)$. "

Notons que Cg et Cf se croisent au point $(1;1)$.

2. Justifions que, pour tout $x \in]-\infty;0]$, $f(x) < g(x)$:

Ici: • $f(x) = xe^{1-x^2}$

• $g(x) = e^{1-x}$

• $Df = \mathbb{R}$ et $Dg = \mathbb{R}$.

$$g(x) > f(x) \iff e^{1-x} > xe^{1-x^2}$$

$$\iff x\frac{e^{1-x^2}}{e^{1-x}} < 1$$

$$\iff xe^{-x^2+x} < 1 \quad (a).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc pour tout $x \in]-\infty;0]$, $e^{-x^2+x} > 0$.

Donc si $x \in]-\infty;0]$, l'inégalité (a) est toujours vérifiée.

En définitive: si $x \in]-\infty;0]$, $f(x) < g(x)$.

3. a. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x) \iff \varphi(x) \leqslant 0$:

Ici: • $f(x) = xe^{1-x^2}$

• $g(x) = e^{1-x}$

• $\varphi(x) = \ln(x) - x^2 + x$

• $Df = Dg = D\varphi =]0;+\infty[$.

D'après la question précédente, nous pouvons écrire:

$f(x) \leqslant g(x)$ ssi: $x e^{-x^2+x} \leqslant 1$ (a)

cad: $\ln(x e^{-x^2+x}) \leqslant \ln(1)$

ou encore: $\ln(x) - x^2 + x \leqslant 0$ $(x > 0)$

ce qui revient à: $\varphi(x) \leqslant 0$.

En conclusion: pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ <=> $\varphi(x) \leqslant 0$.

3. b. Dressons le tableau de variation de la fonction φ:

• Ici: • $\varphi(x) = \ln(x) - x^2 + x$

• $D\varphi =]0;+\infty[$.

D'après l'énoncé, φ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer φ' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$.

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$.

• Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

• **1er cas**: $\varphi'(x) = 0$.

$\varphi'(x) = 0$ <=> $\frac{1}{x} - 2x + 1 = 0$

<=> $-2x^2 + x + 1 = 0$ $(x \neq 0)$

cad ssi: $x = 1$, car $x = -\frac{1}{2} \notin]0;+\infty[$.

• **2^{eme} cas**: $\varphi'(x) < 0$.

$\varphi'(x) < 0 \iff -2x^2 + x + 1 < 0$

cad ssi: $x \in]1;+\infty[$.

• **3^{eme} cas**: $\varphi'(x) > 0$.

$\varphi'(x) > 0 \iff -2x^2 + x + 1 > 0$

cad ssi: $x \in]0;1[$.

Au total: • φ est décroissante sur $[1;+\infty[$,

(car sur cet intervalle, $\varphi'(x) \leqslant 0$)

• φ est croissante sur $]0;1]$.

(car sur cet intervalle, $\varphi'(x) \geqslant 0$)

• **Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant**:

x	0		1		$+\infty$
φ'	‖	$+$	0	$-$	
φ	‖ a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = ...$,

• $b = 0$,

• $c = ...$

3. c. Déduisons-en que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$:

Le maximum de la fonction φ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est atteint quand: $x_{max} = 1$.

Dans ce cas: $\varphi_{max}(x_{max}) = 0$ (b sur le tableau de variation).

Au total, comme $\varphi_{max}(x_{max}) = 0$, nous pouvons affirmer que:

pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$.

4. a. " A priori, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) \geqslant f(x)$ " ?

À la question précédente, nous avons vu que: $\varphi(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Or: $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

D'où: $f(x) - g(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$.

Au total, oui la conjecture est valide car: pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) \geqslant f(x)$.

Cela confirme bien que la courbe de la fonction g est au dessus de celle de la fonction f.

4. b. Montrons que Cf et Cg ont un unique point commun:

Ici: • $f(x) = x e^{1-x^2}$

• $g(x) = e^{1-x}$

• $Df = Dg =]0;+\infty[$.

Le point d'intersection des courbes Cf et Cg est tel que:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Or, $\varphi(x) = 0$ quand: $x = 1$.

Ainsi, les courbes Cf et Cg ont un unique point commun:

le point $A(1;f(1))$ ou $A(1;g(1))$, cad: $A(1;1)$.

4. c. Montrons qu'au point A, les deux courbes ont la même tangente:

Pour répondre à cette question, il suffit de montrer qu'au point A(1;1):

$$f'(A) = g'(A).$$

Or nous savons que:
- $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$
- $g'(x) = -e^{1-x}$.

Dans ces conditions, au point A(1;1):

- $f'(A) = -1$
- $g'(A) = -1$.

Au total: oui les 2 courbes ont la même tangente.

Partie C:

1. Déterminons une primitive F de f sur IR:

f est continue sur IR, elle admet donc une primitive sur IR cad une fonction F dérivable sur IR avec $F' = f$.

Ici: $F(x) = \int f(x)dx$ => $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

Et nous avons bien, pour tout $x \in$ IR: $F'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot e^{1-x^2}$ => $F'(x) = f(x)$.

Au total, une primitive F de f sur IR est: $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

2. Déduisons-en la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$.

" $e^{1-x} - xe^{1-x^2}$ " est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent : I existe.

$$I = \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$$

$$= [-e^{1-x} - F(x)]_0^1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e-1).$$

Au total : $I = \frac{1}{2}(e-1).$

3. Interprétons graphiquement ce résultat :

Cela signifie qu'en unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe Cf, la courbe Cg et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, est telle que : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(e-1).$

Nous pouvons représenter cette aire $\mathcal{A}$, en jaune, sur le graphique suivant :