

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« exp » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A: Administration par voie intraveineuse

1. Déterminons la demi-vie  $t_{0,5}$ :

Il s'agit ici de déterminer  $t$  tel que:  $f(t) = 10$ .

$$f(t) = 10 \Leftrightarrow 20 e^{-0,1t} = 10$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{0,1t} = 2$$

$$\Leftrightarrow 0,1t = \ln(2)$$

$$\Rightarrow t_{0,5} = 10 \times \ln(2).$$

Au total, la demi-vie est:  $t_{0,5} = 10 \times \ln(2)$  cad  $t_{0,5} \approx 6,9$  heures.

6,9 heures correspond en fait à: 6 heures et 54 minutes.

2. Déterminons le temps à partir duquel le médicament est éliminé:

Il s'agit ici de déterminer  $t$  tel que:  $f(t) \leq 0,2$ .

$$f(t) \leq 0,2 \Leftrightarrow 20 e^{-0,1t} \leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow e^{0,1t} \geq 100$$

$$\Leftrightarrow 0,1t \geq \ln(100)$$

$$\Rightarrow t \geq 10 \times \ln(100) \text{ ou } t \geq t^*, \text{ avec: } t^* = 10 \times \ln(100).$$

Au total, le temps à partir duquel le médicament sera éliminé est:

$$t^* = 10 \times \ln(100) \text{ cad } t^* \approx 46,1 \text{ heures (arrondi au dixième).}$$

46,1 heures correspond en fait à: 46 heures et 06 minutes.

### 3. Vérifions que l'ASC est égale à $200 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}$ :

Il s'agit ici de calculer:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ .

$$\text{Soit: } I = \int_0^x f(t) dt.$$

$f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ , elle admet donc des primitives sur  $[0; +\infty[$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x 20 e^{-0,1t} dt \\ &= 20 \times \left[ -\frac{e^{-0,1t}}{0,1} \right]_0^x \Rightarrow I = 200 - \frac{200}{e^{0,1x}}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} I \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 200 - \frac{200}{e^{0,1x}} \right) \\ &= 200 \left( \text{d'après le cours: } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{200}{e^{0,1x}} = 0 \right). \end{aligned}$$

Au total, l'ASC est bien égale à:  $200 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}$ .

## Partie B: Administration par voie orale

1. Démontrons que sur  $[0; +\infty[$ ,  $g'(t) = 20 e^{-t} (1 - 0,1 e^{0,9t})$ :

Ici: •  $g(t) = 20 (e^{-0,1t} - e^{-t})$

•  $Dg = [0; +\infty[$ .

Posons:  $g = 20 (g_1 + g_2)$ , avec:  $g_1(t) = e^{-0,1t}$  et  $g_2(t) = -e^{-t}$ .

$g_1$  et  $g_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions "exponentielles", donc dérivables sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Dans ces conditions,  $g_1 + g_2$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme de 2 fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Par conséquent,  $g = 20 (g_1 + g_2)$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $g'$  pour tout  $t \in [0; +\infty[$ .

Pour tout  $t \in [0; +\infty[$ :  $g'(t) = 20 (-0,1 e^{-0,1t} + e^{-t})$

$$\Rightarrow g'(t) = 20 e^{-t} (1 - 0,1 e^{0,9t}).$$

Au total, pour tout  $t \in [0; +\infty[$ , nous avons bien:  $g'(t) = 20 e^{-t} (1 - 0,1 e^{0,9t})$ .

2. a. Étudions les variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $t \in [0; +\infty[$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $g'(t) = 0$ .

$g'(t) = 0$  ssi  $1 - 0,1 e^{0,9t} = 0$  ( $20 e^{-t} > 0$ , pour tout  $t \in [0; +\infty[$ )

$$\Leftrightarrow e^{0,9t} = 10$$

$$\Leftrightarrow 0,9t = \ln(10), \text{ cad: } t = \frac{\ln(10)}{0,9}$$

• 2<sup>ème</sup> cas:  $g'(t) < 0$ .

$g'(t) < 0$  ssi  $1 - 0,1e^{0,9t} < 0$  ( $20e^{-t} > 0$ , pour tout  $t \in [0; +\infty[$ )

$$\Leftrightarrow e^{0,9t} > 10, \text{ cad: } t > \frac{\ln(10)}{0,9}$$

• 3<sup>ème</sup> cas:  $g'(t) > 0$ .

$g'(t) > 0$  ssi  $1 - 0,1e^{0,9t} > 0$  ( $20e^{-t} > 0$ , pour tout  $t \in [0; +\infty[$ )

$$\Leftrightarrow e^{0,9t} < 10, \text{ cad: } t < \frac{\ln(10)}{0,9}$$

**Au total:**

- $g$  est croissante sur  $\left[0; \frac{\ln(10)}{0,9}\right]$ ,  
(car sur  $\left[0; \frac{\ln(10)}{0,9}\right]$ ,  $g'(t) \geq 0$ )
- $g$  est décroissante sur  $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}; +\infty\right[$ .  
(car sur  $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}; +\infty\right[$ ,  $g'(t) \leq 0$ )

2. b. Dressons le tableau de variations de  $g$ :

$t$	0	$\frac{\ln(10)}{0,9}$	$+\infty$
$g'$	+	0	-
$g$	$a$	$b$	$c$

- Avec:
- $a = g(0) \Rightarrow a = 0,$
  - $b = g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right) \Rightarrow b \approx 13,94,$
  - $c = \dots$

2. c. Déduisons-en la durée après laquelle la concentration est maximale:

D'après le tableau de variations, le maximum de  $g$  est atteint au point:

$$\left(\frac{\ln(10)}{0,9}; g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right)\right).$$

Or:  $\frac{\ln(10)}{0,9} \approx 2,56$  heures.

Au total, la durée après laquelle la concentration est maximale est:

$$t_{\max} \approx 2,56 \text{ heures.}$$

2,56 heures correspond en fait à: 2 heures et 34 minutes.