

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« exp » : Études de fonctions

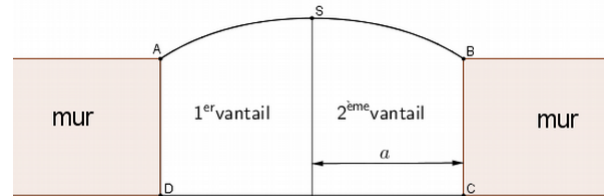


# ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur  $a$  telle que  $0 < a \leq 2$ .

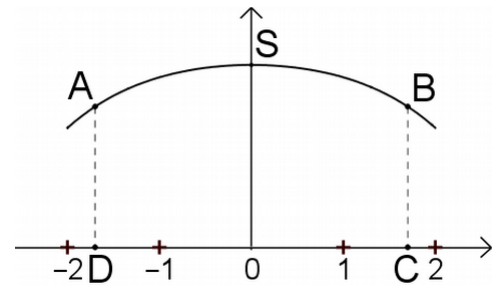
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés  $[AD]$  et  $[BC]$  sont perpendiculaires au seuil  $[CD]$  du portail. Entre les points  $A$  et  $B$ , le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $[-2; 2]$  par :

$$f(x) = -\frac{b}{8} \left( e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  aient pour coordonnées respectives  $(-a; f(-a))$ ,  $(a; f(a))$ ,  $(a; 0)$  et  $(-a; 0)$  et on note  $S$  le sommet de la courbe de  $f$ , comme illustré ci-contre.



## Partie A

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-2; 2]$ ,  $f(-x) = f(x)$ . Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction  $f$  ?
2. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-2; 2]$  :

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \left( e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2; 2]$  et en déduire les coordonnées du point  $S$  en fonction de  $b$ .

## Partie B

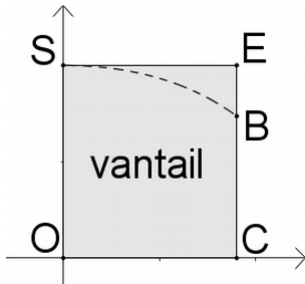
La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point  $S$  soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de  $a$  et  $b$ .

1. Justifier que  $b = 1$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 1,5$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[0; 2]$  et en déduire une valeur approchée de  $a$  au centième.
3. Dans cette question, on choisit  $a = 1,8$  et  $b = 1$ . Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à  $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ . Que décide le client ?

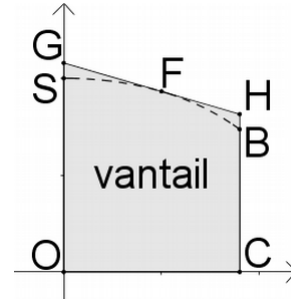
### Partie C

On conserve les valeurs  $a = 1,8$  et  $b = 1$ .

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle  $OCES$ , soit un trapèze  $OCHG$  comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite  $(GH)$  est la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $F$  d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.

Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant  $b$  et  $B$  respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et  $h$  la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$