

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Montrons que pour tout $x \in [-2; 2]$, $f(-x) = f(x)$:

Ici: • $f(x) = \frac{-b}{8} (e^{\frac{x}{b}} + e^{\frac{-x}{b}}) + \frac{9}{4}$, avec $b > 0$

• $Df = [-2; 2]$.

Dans ces conditions pour tout $x \in [-2; 2]$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-b}{8} (e^{\frac{-x}{b}} + e^{\frac{-(-x)}{b}}) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{-b}{8} (e^{\frac{-x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{-b}{8} (e^{\frac{x}{b}} + e^{\frac{-x}{b}}) + \frac{9}{4} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien, pour tout $x \in [-2; 2]$: $f(-x) = f(x)$.

1. b. Que peut-on en déduire ?

Cela signifie: • d'une part, que la fonction f est paire sur $[-2; 2]$,
• d'autre part, que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Calculons f' sur l'intervalle $[-2; 2]$:

f est dérivable sur \mathbb{R} , donc dérivable sur $[-2; 2]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2; 2]$.

$$\text{Pour tout } x \in [-2; 2]: f'(x) = \frac{-b}{8} \left(\frac{1}{b} e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{b} e^{\frac{-x}{b}} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{8} (e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}).$$

$$\text{Au total, pour tout } x \in [-2; 2]: f'(x) = -\frac{1}{8} (e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}).$$

3. a. Dressons le tableau de variations de f sur $[-2; 2]$:

• Étudions le signe de f' sur $[-2; 2]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[-2; 2]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{-x}{b}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{b} = -\frac{x}{b} \quad (\text{car: } \ln[e^u] = u)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{b} = 0, \text{ cad: } x = 0.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } \frac{2x}{b} > 0, \text{ cad: } x \in]0; 2].$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } \frac{2x}{b} < 0, \text{ cad: } x \in [-2; 0[.$$

Au total: • f est croissante sur $[-2; 0]$,

(car sur $[-2; 0]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[0; 2]$.

(car sur $[0; 2]$, $f'(x) \leq 0$)

• Dresser le tableau de variations de f :

x	-2	0	2
f'	+	0	-
f			

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = \frac{-b}{8} (e^{\frac{-2}{b}} + e^{\frac{2}{b}}) + \frac{9}{4}$,

• $a' = f(0) \Rightarrow a' = \frac{-b+9}{4}$,

• $a'' = f(2) \Rightarrow a'' = \frac{-b}{8} (e^{\frac{2}{b}} + e^{\frac{-2}{b}}) + \frac{9}{4}$.

3. b. Déduisons-en les coordonnées du point S en fonction de b:

D'après le tableau de variations, le maximum de f est atteint au point:

$$(0; a') \text{ cad } \left(0; \frac{-b+9}{4}\right).$$

Au total, le point S est tel que: $S\left(0; \frac{-b+9}{4}\right)$.

Partie B:

1. Justifions que $b = 1$:

D'après l'énoncé: " On souhaite que le point S soit à 2 mètres du sol ".

Dans ces conditions, nous avons:

$$f(0) = 2 \iff \frac{-b+9}{4} = 2 \implies b = 1.$$

Au total, nous avons bien: $b = 1$ et $S(0; 2)$.

2. a. Montrons que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[-2; 2]$, donc sur $[0; 2]$.

- " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4}$ (car: $b = 1$)
et: $f(0) = 2$.

- f est strictement décroissante sur $]0; 2]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet une **unique** solution α appartenant à $]0; 2]$.

Au total: $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α sur $]0; 2]$.

2. b. Déduisons-en une valeur approchée de " a " au centième:

Comme " **La hauteur du mur est de 1,5 mètres** ", " a " est tel que: $f(a) = 1,5$.

Déterminer la valeur de " a " revient donc à déterminer la valeur de α .

Par tâtonnement, nous trouvons: $a = \alpha \approx 1,76$ à 10^{-2} près.

Au total, une valeur approchée de a au centième est: $a \approx 1,76$.

3. Que décide le client ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la masse réelle d'un vantail et comparer le résultat obtenu à 60 kg.

D'après le cours, nous savons que:

" Pour un corps homogène d'épaisseur constante, la masse surfacique (M_s) est le rapport de sa masse (m) sur sa surface (A) ".

$$\text{D'où: } M_s = \frac{m}{A}$$

- Ici :
- la densité des planches de bois (**masse surfacique**) est égale à $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$,
 - l'aire d'un vantail (**surface**) est égale à $A = \int_0^a f(x) dx$ (en m^2),
 - la masse d'un vantail **m** est l'inconnue recherchée (en kg).

Dans ces conditions: $m = 20 \times A$.

$$\begin{aligned} \text{Or: } A &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^{1,8} f(x) dx \\ &= \int_0^{1,8} \left(-\frac{1}{8} (e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{8} [e^x - e^{-x}]_0^{1,8} + \left[\frac{9}{4} x \right]_0^{1,8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{8} (e^{1,8} - e^{-1,8}) + 4,05 \quad \text{ou: } A \approx 3,31 \text{ m}^2.$$

D'où: $m \approx 20 \times 3,31 \Rightarrow m \approx 66,29 \text{ kg}$.

Au total: comme $m \approx 66,29 \text{ kg} > 60 \text{ kg}$, la masse d'un vantail excède 60 kg et donc le client décidera d'automatiser son portail.

Partie C:

Évaluons l'économie réalisée en termes de surface en choisissant " 2 " plutôt que " 1 ":

Soient: • A_1 , l'aire du rectangle (forme 1),

- \mathcal{A}_2 , l'aire du trapèze (forme 2).

Nous avons: • $\mathcal{A}_1 = 2 \times a$ (car: $S(0; 2)$),

$$\bullet \mathcal{A}_2 = \left(\frac{b+B}{2} \right) \times h \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 = \left(\frac{CH + OG}{2} \right) \times a$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \approx \left(\frac{1,63 + 2,16}{2} \right) \times a$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_2 \approx 1,895 \times a.$$

Or: $a = 1,8$, d'où: $\mathcal{A}_1 = 3,6 \text{ m}^2$ et $\mathcal{A}_2 \approx 3,411 \text{ m}^2$.

Et: $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 \approx 0,19 \text{ m}^2$.

Ainsi, l'économie réalisée en termes de surface en choisissant " 2 " plutôt que " 1 " est: d'environ $0,19 \text{ m}^2$ pour un vantail et d'environ $0,38 \text{ m}^2$ pour le portail en totalité.