

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. **a.** est la bonne réponse.

En effet, le coefficient directeur de la tangente T est négatif. Par conséquent les réponses c et d sont à éliminer.

De plus, la tangente passe par les points A et A' qui ont pour coordonnées respectives et approximatives: $(-5; 1,4)$ et $(0; -0,5)$.

Dans ces conditions, le coefficient directeur " a " est tel que:

$$a \approx \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \Leftrightarrow a \approx \frac{-0,5 - 1,4}{0 - (-5)} \text{ cad: } a \approx 0,38.$$

Au total: comme $-0,38$ est proche de $-\frac{1}{3}$, nous retiendrons la réponse **a**.

2. **d.** est la bonne réponse.

En effet, comme la courbe C_f semble toujours être au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[-5; 5]$, la fonction f semble convexe sur $[-5; 5]$.

Ainsi: comme f semble convexe sur $[-5; 5]$, nous retiendrons la réponse **d**.

3. **b.** est la bonne réponse.

En effet, en comptant de manière très approximative le nombre de grands carreaux, il semble que: $4 \leq I \leq 7$.

D'où: la réponse **b**.

Partie B:

1. a. Montrons que $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$:

Ici: • $f(x) = (x - 5) e^{0,2x} + 5$ $(u \times e^v + 5)$

• $Df = [-10; 5]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[-10; 5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-10; 5]$.

Pour tout $x \in [-10; 5]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1) \times (e^{0,2x}) + (x - 5) \times (0,2 e^{0,2x}) + 0 && (u' \times e^v + u \times v' \times e^v + 0) \\ &= 0,2x e^{0,2x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [-10; 5]$: $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$.

1. b. Dressons le tableau de variation de f sur $[-10; 5]$:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10; 5]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 0,2x \leq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 0 \text{ ou } x \in [-10; 0].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{0,2x} > 0$)

• 2^{ème} cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 0,2x \geq 0, \text{ cad ssi: } x \geq 0 \text{ ou } x \in [0; 5].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{0,2x} > 0$)

- Au total:**
- f est décroissante sur $[-10; 0]$,
 - f est croissante sur $[0; 5]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation de f sur $[-10; 5]$:

x	-10	0	5
f'	-	0	+
f	a	b	c

(Note: In the original image, arrows point from 'a' to 'b' and from 'b' to 'c' in the 'f' row.)

- Avec:
- $a = -15 e^{-2} + 5$,
 - $b = 0$,
 - $c = 5$.

1. c. Déterminons la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à C_f au point $A(-5; f(-5))$:

La valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à C_f au point A est: $f'(-5)$.

Or: $f'(-5) = 0,2 \times (-5) \times e^{0,2 \times (-5)}$ **cad:** $f'(-5) = -e^{-1}$.

Ainsi, le coefficient directeur a pour valeur exacte: $-e^{-1}$.

2. a. Justifions que $f''(x) = (0,2 + 0,04x) e^{0,2x}$:

Nous savons que pour tout $x \in [-10; 5]$: $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$. (u x e^v)

Dans ces conditions, pour tout $x \in [-10; 5]$:

$$f''(x) = (0,2) \times (e^{0,2x}) + (0,2x) \times (0,2 e^{0,2x}) \quad (u' \times e^v + u \times v' \times e^v)$$

cad: $f''(x) = (0,2 + 0,04x) \times e^{0,2x}$.

Au total, pour tout $x \in [-10; 5]$, nous avons bien: $f''(x) = (0,2 + 0,04x) \times e^{0,2x}$.

2. b. Etudions la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 5]$:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout $x \in [-10; 5]$: $f''(x) = (0,2 + 0,04x) e^{0,2x}$:

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ ssi: $0,2 + 0,04x \leq 0$ cad: $x \leq -5$,

• $f''(x) \geq 0$ ssi: $0,2 + 0,04x \geq 0$ cad: $x \geq -5$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{0,2x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-10; -5]$,

• f est convexe sur $I' = [-5; 5]$.

3. a. Déterminons la valeur exacte de I définie par $I = \int_0^5 f(x) dx$:

Ici: $I = \int_0^5 f(x) dx$.

D'où: $I = [F(x)]_0^5$

$$\begin{aligned}
&= [(5x - 50) e^{0,2x} + 5x]_0^5 \\
&= ((25 - 50) \times e^1 + 25) - (-50 \times e^0 + 0) \\
&= 75 - 25e \\
&\approx 7,043.
\end{aligned}$$

- Ainsi :**
- une valeur exacte de I est $75 - 25e$,
 - une valeur approchée de I est $7,043$.

3. b. Montrons que l'aire demandée vaut 12,5 unités d'aire:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire \mathcal{A} du domaine du plan sous la droite \mathcal{D} , au-dessus de l'axe des abscisses et limité par la droite d'équation $x = 5$ correspond à:

$$\mathcal{A} = \int_0^5 f(x) dx.$$

La fonction $h(x) = x$ est continue sur $[0; 5]$; elle admet donc des primitives sur $[0; 5]$ et par conséquent: \mathcal{A} existe.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^5 x dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 \\
&= \frac{25}{2} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Au total, l'aire demandée \mathcal{A} est bien égale à: $\mathcal{A} = 12,5 \text{ u.a.}$

3. c. Déduisons-en une valeur approchée de l'aire du domaine S en unités d'aire:⁶

Une valeur approchée de S en unités d'aire est:

$$S = A - I$$

$$\Leftrightarrow S \approx 12,5 - (7,043) \text{ cad: } S \approx 5,46 \text{ u.a.}$$

Au total, une valeur approchée de S est: $S \approx 5,46 \text{ u.a.}$