

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Modélisation discrète

1. Déterminons la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement:

Déterminer la température du four au bout de 4 heures de refroidissement revient à calculer T_4 .

Or: • $T_0 = 1000$ degrés,

• $T_1 = 0,82 \times 1000 + 3,6 \iff T_1 = 823,6$ degrés,

• $T_2 = 0,82 \times 823,6 + 3,6 \iff T_2 = 678,952$ degrés,

• $T_3 = 0,82 \times 678,952 + 3,6 \iff T_3 = 560,34064$ degrés,

• $T_4 = 0,82 \times 560,34064 + 3,6 \iff T_4 = 463$ degrés, arrondie à l'unité.

Au total, la température du four au bout de 4 heures de refroidissement est de: 463 degrés Celsius.

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ "

Initialisation: • $T_0 = 980 \times (0,82)^0 + 20$ cad: $T_0 = 1000$.

Or, d'après l'énoncé: $T_0 = 1000$.

Donc vrai au rang $n = 0$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$
et montrons qu'alors $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.

Supposons: $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,82 \times T_n = 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20)$$

$$\Rightarrow 0,82 \times T_n + 3,6 = 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20) + 3,6$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + (0,82 \times 20 + 3,6)$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$T_n = 980 \times 0,82^n + 20.$$

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque ?

D'après l'énoncé, la porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 degrés Celsius.

Dans ces conditions, pour répondre à la question, nous devons résoudre l'inéquation: $T_n \leq 70$.

$$T_n \leq 70 \Leftrightarrow 980 \times (0,82)^n + 20 \leq 70$$

$$\Leftrightarrow (0,82)^n \leq \frac{5}{98}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,82) \leq \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0,82)}, \text{ car: } 0,82 \in]0; 1[, \text{ et donc: } \ln(0,82) < 0$$

$\Rightarrow n \geq 15$ heures, car n est un entier naturel.

Au total: au bout de 15 heures, le four peut être ouvert sans aucun risque.

Partie B: Modélisation continue

1. Déterminons les valeurs de a et b :

D'après l'énoncé, sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$\bullet f(t) = a e^{-\frac{t}{5}} + b$$

$$\bullet f'(t) = 4 - \frac{1}{5} f(t)$$

$$\bullet f(0) = 1000.$$

• Détermination de ' a ' :

$$f(t) = a e^{-\frac{t}{5}} + b, \text{ d'où: } f'(t) = -\frac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}}.$$

$$\text{Dans ces conditions: } f'(0) = -\frac{a}{5} e^{-0} \text{ cad: } f'(0) = -\frac{a}{5}.$$

$$\text{Or, nous avons aussi: } f'(0) = 4 - \frac{1}{5} f(0) \text{ cad: } f'(0) = 4 - \frac{1}{5} (1000) = -196.$$

$$\text{En égalisant, nous obtenons: } -\frac{a}{5} = -196 \text{ cad: } a = 980.$$

• Détermination de ' b ' :

$$f(0) = 1000 \Leftrightarrow a e^{-0} + b = 1000 \text{ cad: } a + b = 1000 \quad (1).$$

$$\text{Comme } a = 980, (1) \Leftrightarrow 980 + b = 1000 \text{ cad: } b = 20.$$

Au total: $a = 980$ et $b = 20$.

Et nous pouvons écrire: $f(t) = 980 e^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. a. Déterminons la limite de la fonction f quand t tend vers $+\infty$:

Ici, il s'agit de calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 980 e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

Or, d'après le cours: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{t}{5}}}$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X}, \text{ en posant: } X = \frac{t}{5}$$

$$= 0.$$

Ainsi: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (980 \times 0 + 20)$

$$= 20.$$

Au total: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$.

2. b. Etudions le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et dressons le tableau de variations:

Sur $[0; +\infty[$, nous savons que: $f'(t) = 4 - \frac{1}{5}(980 e^{-\frac{t}{5}} + 20)$.


Ainsi, pour tout $t \in [0; +\infty[$: $f'(t) = -196 e^{-\frac{t}{5}} < 0$.

Comme, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) < 0$, nous pouvons affirmer que:

la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Dans ces conditions, le tableau de variations de f est le suivant:

t	0	$+\infty$
f'	-	
f	c	d



Avec: • $c = f(0) \Rightarrow c = 1000$,

• $d = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \Rightarrow d = 20$.

2. c. Déterminons après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans aucun risque:

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre l'inéquation: $f(t) \leq 70$.

(comme Partie A, question 3.)

$$f(t) \leq 70 \Leftrightarrow 980 e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{5}{98}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-\frac{t}{5}}) \leq \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{5} \leq \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

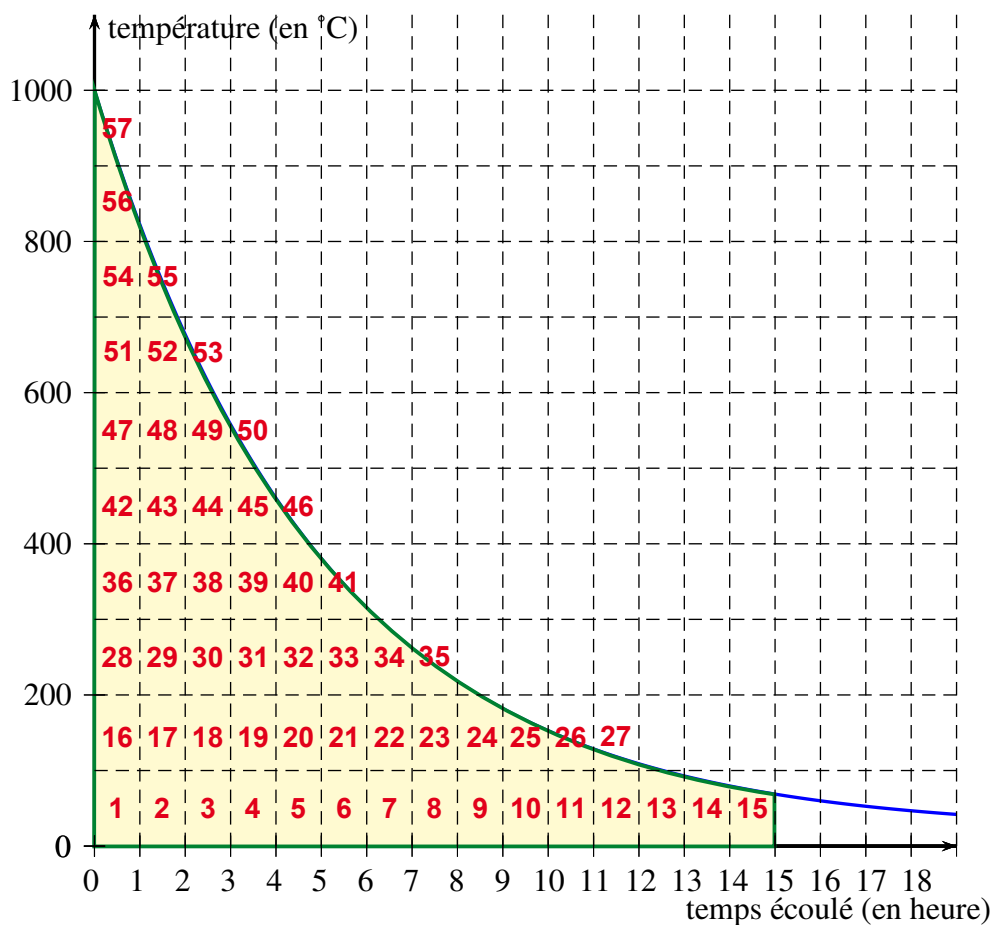
$$\Leftrightarrow t \geq -5 \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$$\Leftrightarrow t \geq 14,878 \text{ heures ou: } t \geq 893 \text{ minutes.}$$

Au total: au bout de 893 minutes, le four peut être ouvert sans aucun risque.

3. a. Donnons une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement (à l'aide du graphique):

Soit le graphique suivant:



En comptant le nombre de rectangles complets, nous obtenons un total de:

$$13 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 = 38 \text{ rectangles.}$$

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7$$

De plus et de manière approximative:

- le 27 et le 14 \approx 1 rectangle,
- le 26 et le 25 \approx 1 rectangle,
- le 35 et le 15 \approx 1 rectangle,
- le 41 et le 34 \approx 1 rectangle,
- le 46 et le 45 \approx 1 rectangle,
- le 50 et le 49 \approx 1 rectangle,
- le 54 et le 53 \approx 1 rectangle,
- le 57 et le 56 \approx 1 rectangle.

Dans ces conditions, nous avons au total:

$$38 \text{ rectangles} + 8 \text{ rectangles (environ)} \approx 46 \text{ rectangles.}$$

Notons qu'un rectangle représente: $100 \times 1 = 100$ unités d'aire.

D'où: $46 \text{ rectangles} \times 100 = 4600$ unités d'aire.

Ainsi, une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières

heures de refroidissement est d'environ: $\frac{1}{15} \times 4600 \approx 307$ degrés Celsius.

3. b. b1. Calculons la valeur exacte de cette température moyenne θ :

La température moyenne du four entre deux instants t_1 et t_2 nous est donnée

par la formule:
$$\theta = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Sur les 15 premières heures de refroidissement, cette température moyenne

est donc égale à:
$$\theta = \frac{1}{15 - 0} \int_0^{15} f(t) dt.$$

f est continue sur $[0; 15]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 15]$ et par conséquent: Θ existe.

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{15-0} \int_0^{15} f(t) dt. \\ &= \frac{1}{15} \int_0^{15} (980 e^{-\frac{t}{5}} + 20) dt \\ &= \frac{1}{15} [980 (-5 e^{-\frac{t}{5}} + 20t)]_0^{15} \\ &= \frac{980}{15} ((-5 e^{-3} + 300) - (-5)) \\ &= \frac{980}{3} ((1 - e^{-3}) + 20).\end{aligned}$$

Ainsi, la valeur exacte de Θ est: $\Theta = \frac{980}{3} ((1 - e^{-3}) + 20)$.

3. b. b2. Donnons la valeur arrondie de Θ en degré Celsius:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur arrondie de Θ en degré Celsius: $\Theta \approx 330,4$ degrés Celsius.

4. a. Vérifions que pour tout réel $t > 0$, $d(t) = 980 (1 - e^{-\frac{1}{5}}) e^{-\frac{t}{5}}$:

D'après l'énoncé: $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

$$\begin{aligned}\text{D'où: } d(t) &= (980 e^{-\frac{t}{5}} + 20) - (980 e^{-\frac{(t+1)}{5}} + 20) \\ &= 980 e^{-\frac{t}{5}} - 980 e^{-\frac{t}{5}} \times e^{-\frac{1}{5}} \\ &= 980 (1 - e^{-\frac{1}{5}}) e^{-\frac{t}{5}}.\end{aligned}$$

Au total, pour tout réel $t > 0$: $d(t) = 980 (1 - e^{-\frac{t}{5}}) e^{-\frac{t}{5}}$.

4. b. b1. Calculons la limite en $+\infty$ de $d(t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 980 (1 - e^{-\frac{t}{5}}) e^{-\frac{t}{5}} \\ &= 0, \text{ car d'après Partie B 2. a.: } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi: $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$.

4. b. b2. Donnons une interprétation de ce résultat:

Nous avons donc: $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$.

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'heures: la température finira par se stabiliser autour de 20 degrés Celsius.

20 degrés Celsius car: $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t+1)$,

et: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20 \text{ degrés Celsius}$.