

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

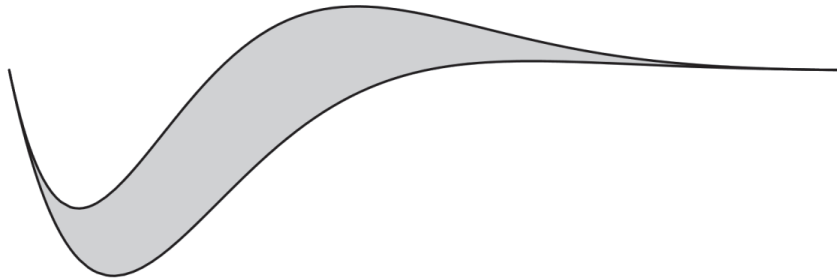
« exp » : Études de fonctions



# ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbf{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbf{R}$ .

## Partie A – Étude de la fonction $f$

1. Justifier que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$  :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .

4. Dans cette question, on étudie la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

a. Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

b. En déduire les variations de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

## Partie B – Aire du logo

On note  $C_f$  et  $C_g$  les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe  $C_f$  par rapport à la courbe  $C_g$  sur  $\mathbf{R}$ .

2. Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$H(x) = \left( -\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que  $H$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$  sur  $\mathbf{R}$ .

On note  $\mathcal{D}$  le domaine délimité par la courbe  $C_f$ , la courbe  $C_g$  et les droites d'équation

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

a. Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ , puis en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près en  $\text{cm}^2$ .

# ANNEXE

