Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

25

CORRECTION

1. Justifions mathématiquement que le problème se ramène à l'étude de l'équation $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$:

Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse $x > 0$ afin que: **la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur**.

Soient **L** et **H** la largeur et la hauteur de l'arc de chaînette.

Ici: • $L = x - (-x)$ **cad**: $L = 2x$;

• $H = y_M - y_O$ **cad**: $H = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) - 0 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$.

Ainsi: $L = H$ ssi: $2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$

$\iff 4x = e^x + e^{-x} - 2$

$\iff e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.

Au total, pour tout $x > 0$, nous avons bien: $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.

2. a. Vérifions l'égalité demandée:

Pour tout $x > 0$: $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$

$= (e^x - 4x) + e^{-x} - 2$

$= x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.

Au total, pour tout $x > 0$, nous avons bien: $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2.$

2. b. Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + \frac{1}{e^x} - 2.$$

Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (Théorème des croissances comparées),

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

Et: • $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2.$

Ainsi: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty,$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 - 2$

$= +\infty.$

Au total: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

3. a. Calculons f' pour $x \in [\,0\,; +\infty\,[$:

Ici: • $f(x) = e^{x} + e^{-x} - 4x - 2$

• $Df = [\,0\,; +\infty\,[$.

Posons: $h = f_1 + f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = e^{x}$, $f_2(x) = e^{-x}$ et $f_3(x) = -4x - 2$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions " exponentielles ", donc dérivables sur l'intervalle $[\,0\,; +\infty\,[$.

f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,; +\infty\,[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,0\,; +\infty\,[$ comme somme **$(f_1 + f_2 + f_3)$** de trois fonctions dérivables sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $f'(x) = e^{x} - e^{-x} - 4$.

Au total, pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $f'(x) = e^{x} - e^{-x} - 4$.

3. b. Montrons que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $(e^{x})^2 - 4\,e^{x} - 1 = 0$:

Pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$, nous avons: $f'(x) = 0 \iff e^{x} - e^{-x} - 4 = 0$ **(1)**.

En multipliant l'égalité **(1)** par e^{x}, nous obtenons:

$$e^{x} \times (e^{x} - e^{-x} - 4) = e^{x} \times 0$$

$$\iff e^{x} \times e^{x} - e^{x} \times e^{-x} - 4\,e^{x} = 0$$

$$\iff (e^{x})^2 - 1 - 4\,e^{x} = 0.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$, nous avons bien: $(e^{x})^2 - 4\,e^{x} - 1 = 0$.

3. c. Déterminons la solution de l'équation $f'(x) = 0$, en posant $X = e^x$:

Soit l'équation: $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$ **(2)**.

En posant: $X = e^x$, nous avons: **(2)** <=> $X^2 - 4X - 1 = 0$.

$\Delta = 16 + 4 = 20 > 0$.

D'où 2 solutions dans IR: • $X' = \dfrac{4 - \sqrt{20}}{2}$ cad: $X' = 2 - \sqrt{5} < 0$,

• $X'' = \dfrac{4 + \sqrt{20}}{2}$ cad: $X'' = 2 + \sqrt{5} > 0$.

Comme $X = e^x$, nous avons alors: $\boldsymbol{x = \ln(X)}$.

Nous retiendrons uniquement la solution: X'' car c'est la seule qui est strictement positive.

D'où: $x = \ln(X'')$ **cad**: $x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

Au total, $f'(x) = 0$ admet une unique solution: $x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

4. a. Dressons le tableau de variations de la fonction f :

Nous pouvons dresser le tableau de variations de la fonction f:

x	0		$\ln(2 + \sqrt{5})$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = f(0)$ => $a = 0$,

• $b = f(\ln(2 + \sqrt{5}))$ => $b = 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln(2 + \sqrt{5})$,

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow c = +\infty$.

4. b. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a ; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a ; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a ; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a ; b]$.

Ici: • f est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc sur $]\ln(2 + \sqrt{5}) ; +\infty[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(\ln(2 + \sqrt{5})) = 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln(2 + \sqrt{5})$

et: $f(+\infty) = +\infty$.

• f est strictement croissante sur $]\ln(2 + \sqrt{5}) ; +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]\ln(2 + \sqrt{5}) ; +\infty[$.

Au total: $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\ln(2 + \sqrt{5}) ; +\infty[$.

5. a. Que contiennent les variables a et b à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Pour répondre à cette question, nous allons compléter un tableau avec les différentes valeurs prises par les variables a et b, à chaque étape de l'algorithme.

Le tableau complété est le suivant:

m	a	b	b - a
	2	3	1
2, 5	2	2, 5	0, 5
2, 25	2, 25	2, 5	0, 25
2, 375	2, 375	2, 5	0, 125
2, 4375	2, 4375	2, 5	0, 0625

Au total, à la fin de l'exécution de l'algorithme, les variables a et b contiennent les valeurs: $a = 2,4375$ et $b = 2,5$.

5. b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

Les valeurs $a = 2,4375$ et $b = 2,5$ sont telles que: $2,4375 < \alpha < 2,5$.

En d'autres termes, a et b fournissent un encadrement de la valeur de α de la question **4. b.**, dont l'amplitude n'excède pas 0, 1:

$$\alpha \in \,]\, 2,4375 \, ; \, 2,5 \, [.$$

Au total, les valeurs de a et b sont telles que: $a < \alpha < b$.

6. Donnons un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch:

Soit l'équation: $e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\left(\frac{t}{39}\right) - 2 = 0$ **(3)**.

En posant $x = \frac{t}{39}$, nous avons: **(3)** $\iff e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$

$\iff$ $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Or l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une unique solution α sur $]\ln(2+\sqrt{5}) ; +\infty[$.

Plus précisément α est tel que: $\boldsymbol{a < \alpha < b}$.

D'où: $\boldsymbol{a < \alpha < b}$.

$\iff a < \frac{t}{39} < b$, **car**: $x = \alpha = \frac{t}{39}$

$\iff 39 \times a < t < 39 \times b$

$\iff 39 \times 2,4375 < t < 39 \times 2,5$

$\iff$ $\boldsymbol{95,0625 < t < 97,5}$.

Au total, un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch est:

$$(95,0625)^2 < H < (97,5)^2, \text{ avec: } H = t^2.$$

(la largeur = la hauteur = le double de la solution de l'équation $f(x) = 0$)

Ainsi, nous pouvons conclure en disant que la hauteur de la Gateway Arch est comprise entre **190, 125 mètres** et **195 mètres**.