Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

24

CORRECTION

Partie A:

1. Vérifions que si $U_1 = 0$, alors $U_4 = -17$:

Ici: • $U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geqslant 1$)

• $U_1 = 0$.

Dans ces conditions:

• $U_2 = (1+1)\,U_1 - 1 \iff U_2 = 2 \times 0 - 1$ cad: $U_2 = -1$,

• $U_3 = (2+1)\,U_2 - 1 \iff U_3 = 3 \times (-1) - 1$ cad: $U_3 = -4$,

• $U_4 = (3+1)\,U_3 - 1 \iff U_4 = 4 \times (-4) - 1$ cad: $U_4 = -17$.

Au total: si $U_1 = 0$, alors nous avons bien $U_4 = -17$.

2. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
Pour N allant de 1 à 12
        | U ← (N + 1) x U - 1
Fin Pour
```

3. **Quelle semble être les limites de cette suite quand $U_1 = 0,7$ puis quand $U_1 = 0,8$?**

Les conjectures que nous pouvons émettre sur les limites de la suite (U_n) sont:

- **Si $U_1 = 0,7$:** " **on pourrait, a priori, penser que la limite de la suite (U_n) est $-\infty$** ".

- **Si $U_1 = 0,8$:** " **on pourrait, a priori, penser que la limite de la suite (U_n) est $+\infty$** ".

Ainsi: • dans le cas où $U_1 = 0,7$, la limite semble être $-\infty$,

• dans le cas où $U_1 = 0,8$, la limite semble être $+\infty$.

Partie B:

1. **Prouvons que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle $[\,0;\,1\,]$:**

Ici: • $f(x) = x\,e^{1-x}$

• $Df = [\,0;\,1\,]$.

Sur l'intervalle $[\,0;\,1\,]$, la fonction F est une primitive de la fonction f ssi:

$$F'(x) = f(x).$$

Pour $x \in [\,0;\,1\,]$, soit: $F(x) = (-1-x)\,e^{1-x}$ $[\,u \times e^{v}\,]$.

F est bien une primitive de f sur $[\,0;\,1\,]$ car:

$$F'(x) = [\,(-1) \times e^{1-x}\,] + [\,(-1-x) \times (-1) \times e^{1-x}\,]$$

$$[\,u' \times e^{v}\,] + [\,u \times v' \times e^{v}\,]$$

$\iff$ $F'(x) = x\,e^{1-x}$ cad: $F'(x) = f(x)$.

Au total: F est bien une primitive de f sur [0; 1].

2. Déduisons-en que $I_1 = e - 2$:

Ici: $I_1 = \int_0^1 x\, e^{1-x}\, dx$, car: $I_n = \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\, dx$.

D'où: $I_1 = \int_0^1 f(x)\, dx$

$= [\, (-1 - x)\, e^{1-x}\,]_0^1$, car: $F(x) = (-1 - x)\, e^{1-x}$

$= -2 \times e^0 - (-1 \times e^1)$

$= e - 2.$

Au total, nous avons bien: $I_1 = e - 2$.

3. Calculons I_2:

D'après l'énoncé: $I_{n+1} = (n + 1)\, I_n - 1$.

Dans ces conditions: $I_2 = (1 + 1)\, I_1 - 1$ cad: $I_2 = 2e - 5$.

Ainsi: $I_2 = 2e - 5$.

4. a. Justifions que $\forall\, x \in [\, 0; 1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$:

Pour tout $x \in [\, 0; 1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\iff -1 \leqslant -x \leqslant -0$

$\iff 1 - 1 \leqslant 1 - x \leqslant 1 - 0$

$\iff 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$

$\iff e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$

(car la fonction exponentielle est croissante)

$\iff 1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e \quad (1).$

En multipliant chaque membre de (1) par x^n qui est positif sur [0; 1],

nous obtenons: $(1) \iff x^n \times 1 \leqslant x^n \times e^{1-x} \leqslant x^n \times e$

$\iff 0 \leqslant x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$, car: $x^n \geqslant 0$ sur [0; 1]

$\iff 0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e.$

Au total, $\forall x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e.$

4. b. Justifions que $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$:

Soit h, la fonction définie sur [0; 1] par: $h(x) = x^n e.$

La fonction h est continue sur [0; 1], elle admet donc des primitives sur [0; 1]

et par conséquent: $\int_0^1 h(x) \, dx$ existe.

Ici: $\int_0^1 h(x) \, dx = \int_0^1 x^n e \, dx$

$= e \times \int_0^1 x^n \, dx$

$= e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$= \frac{e}{n+1}.$

Au total, nous avons bien: $\int_0^1 x^n \, e \, dx = \frac{e}{n+1}$.

4. c. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:
- $g(x) = 0$,
- $f(x) = x \, e^{1-x}$,
- $h(x) = x^n \, e$.

Notons que:
- les fonctions g, f et h sont continues sur $[\,0\,;\,1\,]$;
- elles admettent donc des primitives sur $[\,0\,;\,1\,]$, et par conséquent:

$$\int_0^1 g(x)\,dx,\ \int_0^1 f(x)\,dx \text{ et } \int_0^1 h(x)\,dx \text{ existent};$$

- de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[\,0\,;\,1\,]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant x^n \, e^{1-x} \leqslant x^n \, e$$

$$\Longleftrightarrow \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 x^n \, e^{1-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n \, e\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. **(a)**

4. d. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$:

Quand n tend vers $+\infty$: • $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche de **(a)**)

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ (terme de droite de **(a)**).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Partie C:

1. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$ ".

Initialisation: • $U_1 = 1!\,(U_1 - e + 2) + I_1$

$= U_1 - e + 2 + e - 2$

$= U_1$.

Donc vrai au rang " 1 ".

• $U_2 = 2!\,(U_1 - e + 2) + I_2$

$= 2\,(U_1 - e + 2) + 2e - 5$

$= 2\,U_1 - 1.$

Donc vrai au rang " 2 ". (car: $U_{n+1} = (n+1)\,U_1 - 1$)

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U_n = n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$
et montrons qu'alors $U_{n+1} = (n+1)!\,(U_1 - e + 2) + I_{n+1}$.

Supposons: $U_n = n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$, pour un entier naturel n fixé supérieur
(1) ou égal à 1.

[Rappel: $U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$ et $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1$]

(1) $\Rightarrow (n+1) \times U_n = (n+1) \times n!\,(U_1 - e + 2) + (n+1) \times I_n$

$\Rightarrow (n+1) \times U_n - 1 = (n+1)!\,(U_1 - e + 2) + (n+1) \times I_n - 1$

$\Rightarrow U_{n+1} = (n+1)!\,(U_1 - e + 2) + I_{n+1}$.

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$.

2. a. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ quand $U_1 = 0,7$:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} n!\,(U_1 - e + 2)\right) + \left(\lim_{n\to+\infty} I_n\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} n!\,(2,7 - e)\right) + \left(\lim_{n\to+\infty} I_n\right)$$

$= -\infty + 0$, car: $2,7 - e < 0$

$= -\infty$.

Ainsi: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$, lorsque $U_1 = 0,7$.

2\. b. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ quand $U_1 = 0,8$:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} n!\,(U_1 - e + 2)\right) + \left(\lim_{n\to+\infty} I_n\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} n!\,(2,8 - e)\right) + \left(\lim_{n\to+\infty} I_n\right)$$

$= +\infty + 0$, car: $2,8 - e > 0$

$= +\infty$.

Ainsi: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, lorsque $U_1 = 0,8$.