

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« exp » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. a. Déterminons la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ :

Ici: •  $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$      $(u - \frac{1}{2}(e^v + e^w))$

•  $Df = \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right)$$

Or: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ .

D'où: 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(+\infty + 0)$$

$$= -\infty.$$

Au total: 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

1. b. Montrons que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ :

Pour ce faire, nous allons calculer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Posons:  $f = f_1 - \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$ , avec:  $f_1(x) = \frac{7}{2}$ ,  $f_2(x) = e^x$  et  $f_3(x) = e^{-x}$ .

$f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme.

$f_2$  et  $f_3$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonction "exponentielle".

Dans ces conditions, la fonction  $h = f_2 + f_3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Et donc, la fonction  $g = -\frac{1}{2}(f_2 + f_3)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme ( $f_1 + g$ ) de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  ( $u' - \frac{1}{2}(v'e^v + w'e^w)$ )

Distinguons 2 cas pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq e^{-x} \Leftrightarrow x \leq -x \Leftrightarrow x \leq 0$$

ou:  $x \in ]-\infty; 0]$ .

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$$

ou:  $x \in [0; +\infty[$ .

Au total: •  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 0]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

$f$  est même strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

1. c. Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ :

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour pouvoir répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[0; +\infty[$ .

• " $k = 0$ " est compris entre:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$

$$\text{et: } f(0) = \frac{5}{2} > 0.$$

•  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 0$  ( $k = 0$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à  $[0; +\infty[$ .

2. Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$  qui sont opposées:

Préalablement, nous remarquons que pour tout réel  $x$ :

$$f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x).$$

On dit que la fonction  $f$  est paire.

Nous pouvons donc écrire:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0$ .

Dans ces conditions: comme l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0; +\infty[$ , l'équation  $f(-x) = 0$  admet donc une unique solution sur  $[0; +\infty[$ , ce qui équivaut à dire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $] -\infty; 0]$ .

Et nous pouvons noter:  $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$ , avec:  $\alpha \in [0; +\infty[$  et  $-\alpha \in ]-\infty; 0]$ .

Au total, l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ :

- $\alpha \in [0; +\infty[$ ,
- $\beta = -\alpha \in ]-\infty; 0]$ .

## Partie B:

1. Calculons la hauteur d'un arceau:

Ici: •  $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

•  $Df = [-\alpha; \alpha]$ , avec:  $\alpha \in [0; +\infty[$ .

La hauteur d'un arceau correspond à  $f(0)$ . (maximum de la fonction  $f$ )

Or:  $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0})$  cad:  $f(0) = \frac{5}{2} = 2,5$  mètres.

Ainsi, la hauteur d'un arceau est de: 2,5 mètres.

2. a. Montrons que, pour tout réel  $x$ ,  $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$ :

Nous savons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = -\frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où: } 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} - 2) \\ &= \frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= \frac{2 + e^{2x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons bien:  $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$ .

2. b. b1. Déduisons-en la valeur de l'intégrale  $I$  en fonction de  $\alpha$ :

D'après l'énoncé, la longueur de la courbe  $\mathcal{C}$  sur l'intervalle  $[0; \alpha]$  est donnée, en mètre, par:

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Le calcul de  $I$  donne:  $I = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2} \, dx$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^\alpha \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \, dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} [(e^x - e^{-x})]_0^\alpha$$

cad:  $I = \frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}$  mètres.

Ainsi, la valeur de  $I$  en fonction de  $\alpha$  est:  $I = \frac{1}{2} (e^\alpha - e^{-\alpha})$  mètres.

2. b. b2. Montrons que la longueur d'un arceau est  $L = e^\alpha - e^{-\alpha}$ :

La valeur exacte de la longueur  $L$  d'un arceau sur  $[-\alpha; \alpha]$  est:  $L = 2I$ .

D'où:  $L = e^\alpha - e^{-\alpha}$ .

Ainsi, la longueur d'un arceau est bien:  $L = e^\alpha - e^{-\alpha}$ .

### Partie C:

1. Montrons que  $\mathcal{A} = 4 \int_0^\alpha f(x) dx - 2$ :

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade nord est:

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx.$$

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade sud est:

$$\mathcal{A}_2 = \left( \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \right) - (1 \times 2).$$

(  $1 \times 2 = 1$  mètre  $\times$  2 mètres = aire ouverture )

Ainsi:  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

$$= \left( 2 \times \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \right) - 2.$$

Or:  $f$  est paire.

Par conséquent:  $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \times \int_0^{\alpha} f(x) dx$ , d'après le cours.

D'où:  $\mathcal{A} = \left( 4 \times \int_0^\alpha f(x) dx \right) - 2.$

Au total, nous avons bien:  $\mathcal{A} = \left( 4 \times \int_0^\alpha f(x) dx \right) - 2.$

2. Déterminons, au  $m^2$  près, l'aire totale de la bâche nécessaire:

Soit  $\mathcal{A}_T$ , l'aire totale de la bâche nécessaire pour réaliser cette serre.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + S$ ,  $S$  étant l'aire de la partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

Or: •  $\mathcal{A} = \left( 4 \times \int_0^\alpha f(x) dx \right) - 2$

$$= 4 \times \left[ \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^\alpha - 2$$

$$= 4 \times \left( \frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \right) - 2$$

$$= 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2.$$

•  $S = (3 \times 1,50) \times L$

( 4 arceaux espacés de 1,5 mètres, donc: 3 x 1,50 )

$$= 4,5 \times (e^\alpha - e^{-\alpha}).$$

Avec:  $\alpha = 1,92$ :  $\mathcal{A} = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^\alpha - e^{-\alpha})$

$$= 14\alpha + 2,5(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2$$

$$= (14 \times 1,92) + 2,5(e^{1,92} - e^{-1,92}) - 2$$

$$\approx 42 m^2.$$

Ainsi, l'aire totale demandée est d'environ:  $42 m^2$ .