Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE 22

CORRECTION

Partie A : Étude Graphique

1. Déterminons la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal :

Pour répondre à cette question, graphiquement, il suffit de prendre le minimum de la courbe (C) (qui correspond en fait au minimum de la fonction C).

Une lecture graphique nous donne : $x_{min} \approx 4,5$ tonnes.

Au total, le coût quotidien de l'entreprise est minimal quand : la quantité de granulés produite est de 4, 5 tonnes.

2. a. Déterminons C(6), R(6) et D(6) :

Graphiquement : $\left.\begin{array}{l} \bullet\ C(6) = 5 \\ \\ \bullet\ R(6) = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow D(6) = R(6) - C(6) = 13.$

Au total, une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés est de : 1300 € (1800 € - 500 €).

2. b. Déterminons les quantités possibles de granulés en tonnes, pour que l'entreprise dégage un bénéfice :

L'entreprise dégage un bénéfice ssi : $D(x) > 0$.

Or: $D(x) > 0$ ssi: $R(x) - C(x) > 0$, cad ssi: $R(x) > C(x)$.

Graphiquement, $R(x) > C(x)$ quand: $x \in]2,8 ; 13,3[$.

Au total, pour dégager un bénéfice, l'entreprise doit produire une quantité de granulés comprise entre: 2, 8 tonnes et 13, 3 tonnes.

Partie B: Étude d'une fonction

1. a. Calculons g' pour tout $x \in [1 ; 15]$:

Ici: • $g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$

• $Dg = [1 ; 15]$.

Posons: $g = g_1 + g_2$, avec: $g_1(x) = -0,6x + 4$ et $g_2(x) = e^{-x+5}$.

g_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[1 ; 15]$.

g_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$.

Par conséquent, g est dérivable sur $[1 ; 15]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[1 ; 15]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [1 ; 15]$.

Pour tout $x \in [1 ; 15]$: $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.

Au total: $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.

1. b. Déduisons-en que g est décroissante sur [1 ; 15] :

g est décroissante sur [1 ; 15] ssi : pour tout $x \in [1 ; 15]$, $g'(x) \leqslant 0$.

$g'(x) \leqslant 0$ ssi : $-0,6 - e^{-x+5} \leqslant 0$

cad ssi : $e^{-x+5} \geqslant -0,6$ (a).

Or (a) est toujours vérifié car : pour tout $x \in [1 ; 15]$, $e^{-x+5} > 0$.

Au total : g est décroissante sur [1 ; 15].

2. a. Dressons le tableau de variation de g sur [1 ; 15] :

Nous avons le tableau de variation suivant :

x	1		15
g'		$-$	
g	a	$\searrow$	b

Avec : • $a = g(1)$ => $a = 3,4 + e^{4} > 0$,

• $b = g(15)$ => $b = -5 + e^{-10} < 0$.

Au total : • Nous venons de dresser le tableau de variation de g sur [1 ; 15].

• Arrondies à l'unité : $g(1) \approx 58$ et $g(15) \approx -5$.

2. b. Donnons la solution unique de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle [1 ; 15] :

Comme g est strictement décroissante sur [1 ; 15], d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à [1 ; 15].

Soit α, cette solution unique: $\alpha \in [6;7]$.

Par tâtonnement, on trouve, comme valeur arrondie de α à 10^{-1} près: $\alpha \approx 6,9$.

Au total, l'équation $g(x)$ admet comme solution unique dans l'intervalle $[1;15]$:

$$\alpha \approx 6,9.$$

2. c. Déduisons-en le tableau de signe de $g(x)$ sur $[1;15]$:

Nous avons le tableau de signes de g suivant:

x	1		α		15
g		$+$	0	$-$	

Partie C: Application économique

1. Montrons que pour tout réel $x \in [1;15]$, $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$:

Nous savons que: $D(x) = R(x) - C(x)$.

Par conséquent: $D(x) = 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5})$

$$\Rightarrow D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}.$$

Au total, nous avons bien: $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$.

2. Montrons que $D'(x) = g(x)$, pour tout réel $x \in [1;15]$:

D'après l'énoncé, D est dérivable sur $[1;15]$.

Ainsi, nous pouvons calculer D' pour tout $x \in [1;15]$.

Pour tout $x \in [1;15]$: $D'(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$ => $D'(x) = g(x)$.

Au total: pour tout réel $x \in [1;15]$, $D'(x) = g(x)$.

3. Déduisons-en le tableau de variation de D sur [1;15]:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1		$\alpha = 6,9$		15
D'		$+$	0	$-$	
D	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = D(1)$ => $a \approx -50,90$,

• $b = D(6,9)$ => $b \approx 13,17$,

• $c = D(15)$ => $c \approx -7,50$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de D sur [1;15].

4. a. Déterminons la quantité de granulés pour que le bénéfice soit maximal:

La fonction D admet un maximum au point: $M(\alpha;D(\alpha))$.

Avec: $\alpha = 6,9$ tonnes de granulés, l'entreprise dégagera un bénéfice maximal.

4. b. Déterminons ce bénéfice maximal:

Soit D_{max}, ce bénéfice maximal, $D_{max} = D(6,9)$.

Or: $D(6,9) \approx 13,17$ à 10^{-2} près.

Au total, le bénéfice maximal dégagé par l'entreprise est de: 13170 €.