

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« exp » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A: Étude de la fonction  $f$ 

1. Montrons que  $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$ :

Ici: •  $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$   
•  $Df = [3;13]$ .

Posons:  $f = f_1 + (-f_2)$ , avec:  $f_1(x) = -2x + 20$  et  $-f_2(x) = -e^{-2x+10}$ .

$f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, donc dérivable sur  $[3;13]$ .

$f_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle  $[3;13]$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $[3;13]$  comme somme de 2 fonctions dérivables sur  $[3;13]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [3;13]$ .

Pour tout  $x \in [3;13]$ :  $f'(x) = -2 - (-2)e^{-2x+10}$   
 $\Rightarrow f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$ .

**Au total:** pour tout  $x \in [3;13]$ ,  $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$ .

2. a. Résolvons dans  $[3;13]$ ,  $f'(x) \geq 0$ :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(-1 + e^{-2x+10}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x+10} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -2x + 10 \geq \ln(1)$$

$$\Rightarrow x \leq 5.$$

Au total:  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3;5]$ .

2. b. b1. Déduisons-en le signe de  $f'$  sur  $[3;13]$ :

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x \in [3;13]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$f'(x) = 0$  ssi:  $x = 5$ .

• 2<sup>eme</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$f'(x) < 0$  ssi:  $x \in ]5;13]$ .

• 3<sup>eme</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$f'(x) > 0$  ssi:  $x \in [3;5[$ .

Au total: •  $f$  est croissante sur  $[3;5]$ , ou strictement croissante sur  $[3;5[$ ,  
•  $f$  est décroissante sur  $[5;13]$ , ou strictement décroissante sur  $]5;13]$

2. b. b2. Dressons le tableau de variation de  $f$  sur  $[3;13]$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	3	5	13
$f'$	+	0	-
$f$			

- Avec:
- $a = f(3) \Rightarrow a = 14 - e^4 < 0$ ,
  - $b = f(5) \Rightarrow b = 10 - e^0 \Rightarrow b = 9$ ,
  - $c = f(13) \Rightarrow c = -6 - e^{-16} < 0$ .

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[3;13]$ .

2. c. Calculons l'intégrale  $\int_3^{13} f(x) dx$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $I = \int_3^{13} f(x) dx$ .

$f$  est continue sur  $[3;13]$ , elle admet donc des primitives sur  $[3;13]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$I = \int_3^{13} (-2x + 20 - e^{-2x+10}) dx$$

$$= [-x^2 + 20x + \frac{1}{2}e^{-2x+10}]_3^{13}$$

$$\Rightarrow I = 40 + \frac{1}{2}e^{-16} - \frac{1}{2}e^4.$$

En arrondissant à  $10^{-3}$  près, nous obtenons:

$$I \approx 12,701 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

- Au total:
- la valeur exacte de  $I$  est:  $40 + \frac{1}{2}(e^{-16} - e^4)$ ,
  - la valeur approchée de  $I$  est:  $12,701$  à  $10^{-3}$  près.

## Partie B: Application

1. a. Déterminons le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal:

Nous avons vu à la question 2. b. b2. que la fonction  $f$  admet un maximum au point:  $x_b = 5$ .

Ainsi, le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal est: 500 toboggans.

1. b. Déterminons alors ce bénéfice maximal:

Pour cela, il suffit de remplacer  $x$  par "5" dans la fonction  $f$ .

Ainsi nous obtenons:  $\text{Bénéfice}_{\max} = -2 \times 5 + 20 - e^{-2 \times 5 + 10}$

$\Rightarrow \text{Bénéfice}_{\max} \approx 9$  en milliers d'€.

Au total, le bénéfice maximal engendré par la vente de 500 toboggans est de: 9000 €.

2. Calculons le bénéfice moyen:

Le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans correspond à la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[3;13]$ .

Soit  $B_m$ , le bénéfice moyen de  $f$  sur  $[3;13]$ .

$$B_m \text{ est tel que: } B_m = \frac{1}{13-3} \int_3^{13} f(x) dx.$$

$$B_m = \frac{1}{13-3} \int_3^{13} f(x) dx \Leftrightarrow B_m = \frac{1}{10} \times 12,701$$

$$\Rightarrow B_m \approx 1,270 \text{ en milliers d'€.}$$

Au total, le bénéfice moyen est de: 1270 €.

## Partie C: Rentabilité

Déterminons le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer pour être rentable:

L'usine est rentable ssi: son bénéfice est positif

cad ssi: pour tout  $x \in [3;13]$ ,  $f(x) \geq 0$ .

Pour répondre à cette question, nous allons dresser le tableau de la fonction  $f$ :

$x$	3	$\alpha$	5	$\beta$	13
$f(x)$		0	$b$	0	$c$

Diagramme illustrant le tableau de la fonction  $f$ . Les points  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines de la fonction. Les points  $a$  et  $c$  sont les valeurs de la fonction aux bornes 3 et 13 respectivement. Les points  $b$  et  $c$  sont les valeurs de la fonction aux points 5 et 13 respectivement. Des flèches indiquent que  $f(x) \geq 0$  pour  $x \in [\alpha; \beta]$ .

Ainsi,  $f(x) \geq 0$  ssi:  $x \in [\alpha; \beta]$ .

Par tâtonnement, on trouve:  $\alpha \approx 3,74$  et  $\beta \approx 9,99$ .

Au total, pour avoir un bénéfice positif, l'usine doit fabriquer entre:

374 et 999 toboggans par mois.