Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE 2

CORRECTION

Partie A:

1. Lisons graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$:

D'après l'énoncé:
- f est définie et dérivable sur $[0 ; 30]$,
- A $(0 ; -11)$,
- B $(5 ; 0)$,
- C $(11 ; 12)$.

Dans ces conditions:

a. $f(0) = -11$. (ordonnée du point A)

b. $f'(11) = 0$, car la tangente au point C $(11 ; 12)$ est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

c. $f'(0)$?

Nous savons que la tangente à la courbe Cf, au point $x = 0$, passe par les points: A $(0 ; -11)$ et B $(5 ; 0)$.

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(0)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff a = \frac{0 - (-11)}{5 - 0} \quad \text{cad:} \quad a = f'(0) = \frac{11}{5}.$$

Au total: $f(0) = -11$, $f'(11) = 0$ et $f'(0) = \frac{11}{5}$.

2. L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifions:

Ici, F correspond à une primitive de f sur $[\,0\,;30\,]$.

Donc pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$: $F'(x) = f(x)$.

Sur $[\,0\,;\,11\,]$, le signe de f est tantôt négatif, tantôt positif.

Donc sur $[\,0\,;\,11\,]$, la fonction F est d'abord décroissante puis est croissante.

Ainsi: L'affirmation est fausse.

Partie B: Étude d'une fonction

1. Justifions le résultat de la ligne 2 du logiciel:

Ici: • $f(x) = (x^2 - 11)\, e^{-0,2x}$ **($u \times e^v$)**

• $Df = [\,0\,;30\,]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[\,0\,;30\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$:

$$f'(x) = (2x) \times (e^{-0,2x}) + (x^2 - 11) \times (-0,2\,e^{-0,2x}) \qquad \mathbf{(u' \times e^v + u \times v' \times e^v)}$$

$$= (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$: $f'(x) = (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}$.

2. Etudions le signe de f' sur $[0; 30]$ puis dressons le tableau des variations:

Préalablement, résolvons l'équation: $-0,2x^2 + 2x + 2,2 = 0$ (1).

$\Delta = 4 - 4 \times (-0,2) \times 2,2$ cad: $\Delta = 5,76 = (2,4)^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

- $x_1 = \dfrac{-2 - 2,4}{-0,4}$ cad: $x_1 = 11$,

- $x_2 = \dfrac{-2 + 2,4}{-0,4}$ cad: $x_2 = -1$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 30]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-0,2x^2 + 2x + 2,2 \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 11$ ou $x \in [11; +\infty[$.

(car pour tout $x \in IR$, $e^{-0,2x} > 0$)

- 2ème cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-0,2x^2 + 2x + 2,2 \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 11$ ou $x \in [0; 11]$.

(car pour tout $x \in IR$, $e^{-0,2x} > 0$)

Au total:
- f est croissante sur $[0; 11]$,
- f est décroissante sur $[11; +\infty[$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0		11		30
f'		+	0	-	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) = -11$,

• $b = f(11) = 110\, e^{-2,2}$,

• $c = f(30) = 889\, e^{-6}$.

3. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 11]$:

Sur $[0; 11]$, $f(x) = 0 \iff (x^2 - 11)\, e^{-0,2x} = 0$

$\iff x^2 - 11 = 0$, car: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,2x} > 0$

$\iff x^2 = 11$

$\iff \alpha = x = \sqrt{11}$, car: $x \in [0; 11]$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution α sur $[0; 11]$: $\alpha = \sqrt{11}$.

3. b. Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2} près:

Une valeur approchée de $\alpha = \sqrt{11}$, à 10^{-2} près est: $\alpha \approx 3,32$.

4. Calculons la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de I:

Ici: $I = \displaystyle\int_{10}^{20} f(x)\, dx$.

Or d'après le logiciel: $F(x) = (-5x^2 - 50x - 195)\, e^{-0,2x}$.

(F étant l'intégrale de f)

D'où: $I = [\,F\,(x)\,]_{10}^{20}$

$= [\,(-5x^2 - 50x - 195)\,e^{-0,2x}\,]_{10}^{20}$

$= -3195\,e^{-4} + 1195\,e^{-2}$

$\approx 103,21.$

Ainsi: • la valeur exacte de I est $-3195\,e^{-4} + 1195\,e^{-2}$,

• l'arrondi à 10^{-2} de I est $103,21$.

Partie C: Application économique

1. Calculons le nombre d'objets demandés lorsque le prix unitaire est de 15 €:

D'après l'énoncé: • $f(x)$ = la quantité demandée d'objets (x 100 000),

• x = le prix unitaire en euros.

Donc si le prix unitaire est $x = 15$ euros, la quantité demandée d'objets sera de: $f(15) = ((15)^2 - 11)\,e^{-3}$

cad: $f(15) = 214 \times e^{-3}$

ou: $f(15) \approx 10,65 \times 100\,000$ unités.

Ainsi, la quantité totale demandée d'objets au prix unitaire de 15 € est d'environ: 1 065 000 unités.

2. Déterminons la demande moyenne d'objets lorsque le prix unitaire varie entre 10 et 20 euros:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la valeur moyenne " **m** " de f sur l'intervalle $[\,10\,;\,20\,]$.

D'après le cours, " **m** " est telle que: $\mathbf{m} = \frac{1}{20 - 10} \int_{10}^{20} f(x)\, dx$

$$= \frac{1}{10} \times \mathbf{I}.$$

Or: $\mathbf{I} \approx 103,21$.

D'où: $\mathbf{m} \approx \frac{103,21}{10}$

$$\approx 10,32 \times 100000 \text{ unités}.$$

Au total, la demande moyenne d'objets avec un prix unitaire qui varie entre 10 et 20 euros est d'environ: 1032000 unités.

3. Calculons E(15) et interprétons le résultat:

D'après l'énoncé: $E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x$, avec $x \in [\,5\,;30\,]$.

Dans ces conditions, si $x = 15$: $E(15) = \left[\frac{(-0,2 \times (15)^2 + 2 \times (15) + 2,2)\, e^{-3}}{((15)^2 - 11) \times e^{-3}} \right] \times 15$

$$= \left[\frac{-12,8}{214} \right] \times 15$$

$$\approx -0,90.$$

Au total, l'élasticité demandée est d'environ: -0,90.

Cela signifie que si le prix diminue de 1%, alors la demande d'objets augmentera de 0,9% (-1% x -0,9).

On dit alors que le bien est **typique**, sa demande étant une fonction décroissante de son prix.