

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« exp » : Études de fonctions



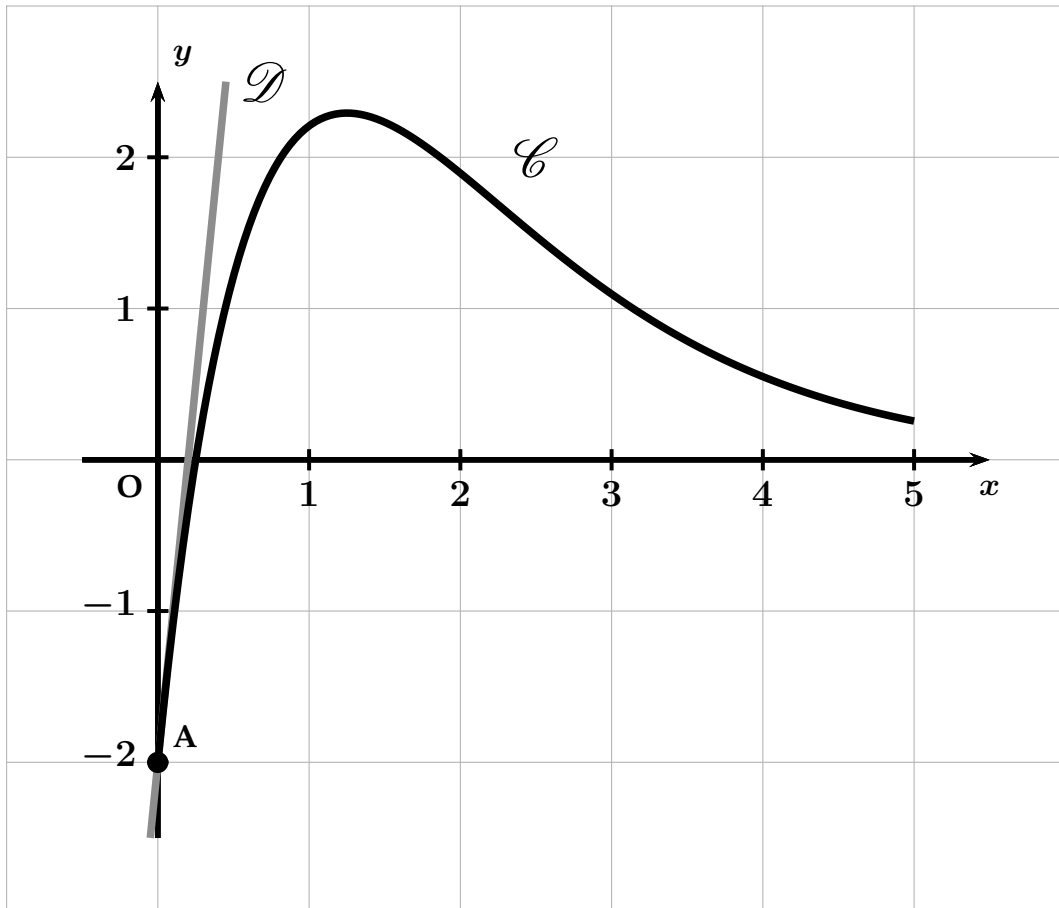
# ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FUNCTION

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0;5]$  par  $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$ , où  $a$  est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $[0;5]$ .

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  est donnée ci-dessous dans un repère d'origine  $O$ .



Les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  passent toutes les deux par le point  $A(0; -2)$ .

La droite  $\mathcal{D}$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$  et admet pour équation  $y = 10x - 2$ .

On rappelle que  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier, les valeurs de  $f(0)$  et  $f'(0)$ .

2. a) Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0;5]$  on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)e^{-x}$$

b) Dédurre des questions précédentes que  $a = 8$ .

c) Donner l'expression de  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .

3. a) Préciser le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0;5]$ . On pourra faire un tableau.  
 b) En déduire le tableau des variations de la fonction  $f$  sur ce même intervalle.  
 c) Résoudre sur l'intervalle  $[0;5]$  l'équation  $f(x) = 0$ .
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10) e^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

- a) Donner l'expression de  $f''$ , fonction dérivée seconde de la fonction  $f$ .  
 b) Justifier que la courbe  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour  $x$  milliers de grille-pains (où  $x$  est un nombre réel de l'intervalle  $[1;5]$ ), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (8x - 2) e^{-x}$$

- a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?  
 b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?  
 On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.