

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Donnons les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$:

Nous avons: • $f(0) = -2$ (A (0; -2))

• $f'(0) = 10$ ($y = 10x - 2$).

2. a. Déterminons f' pour tout réel de l'intervalle $[0; 5]$:

Ici: • $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$ (u x v)

• $Df = [0; 5]$

• f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

Comme f est deux fois dérivable sur $[0; 5]$, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 5]$.

Pour tout $x \in [0; 5]$: $f'(x) = a x e^{-x} + (ax - 2) x (-e^{-x})$ ($u' x v + u x v'$)

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x} x (-ax + a + 2).$$

Au total, pour tout $x \in [0; 3]$: $f'(x) = e^{-x} x (-ax + a + 2)$.

2. b. Déduisons-en que $a = 8$:

Nous savons que: • $f'(0) = 10$

• $f'(x) = e^{-x} x (-ax + a + 2)$.

D'où: $f'(0) = 10$ et $f'(0) = a + 2$.

En égalisant: $a + 2 = 10 \Rightarrow a = 8$.

Au total, nous avons bien: $a = 8$.

2. c. Donnons l'expression de f' en fonction de x :

Comme $a = 8$: pour tout $x \in [0; 5]$, $f'(x) = e^{-x} x (-8x + 10)$.

3. a. Précisons le signe de f' sur l'intervalle $[0; 5]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 5]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } e^{-x} x (-8x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10 = 0^*, \text{ cad: } x = 1,25.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } e^{-x} x (-8x + 10) < 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10 < 0^*, \text{ cad: } x > 1,25 \text{ ou } x \in]1,25; 5].$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } e^{-x} x (-8x + 10) > 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10 > 0^*, \text{ cad: } x < 1,25 \text{ ou } x \in [0; 1,25[.$$

(*: car pour tout $x \in [0; 5]$, $e^{-x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[0; 1,25]$,

(car sur $[0; 1,25]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[1,25; 5]$.

(car sur $[1,25; 5]$, $f'(x) \leq 0$)

3. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[0; 5]$:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0	1,25	5	
f'		+	0	-
f	a	b	c	

Diagramme illustrant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$. Les points critiques sont $x=0$, $x=1,25$ et $x=5$. La dérivée f' est positive sur $(0; 1,25)$, nulle en $x=1,25$, et négative sur $(1,25; 5)$. Les valeurs de la fonction sont a en $x=0$, b en $x=1,25$, et c en $x=5$. Des flèches indiquent que la fonction augmente de a à b et diminue de b à c .

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = -2$,

• $b = f(1,25) \Rightarrow b = 8e^{-1,25}$,

• $c = f(5) \Rightarrow c = 38e^{-5}$.

3. c. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 5]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} x (8x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - 2 = 0 \quad (\text{car pour tout } x \in [0; 5]: e^{-x} > 0)$$

$$\Rightarrow x = 4.$$

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution: $x = 4$.

4. a. Donnons l'expression de f'' :

D'après le logiciel: $g'(x) = e^{-x} x (8x - 18)$.

Ainsi: $f''(x) = e^{-x} x (8x - 18)$.

4. b. Déterminons la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \frac{9}{4}$ (logiciel).

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = 2,25$.

5. a. Déterminons la quantité de grille-pains que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum:

D'après le tableau de variation que nous avons dressé, nous remarquons que f , cad le bénéfice, est maximum quand: $x = 1,25$.

Dans ces conditions le nombre de grille-pains qui permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal est: 1250.

5. b. Déterminons le bénéfice maximal:

Le bénéfice maximal est atteint quand: $x = 1,25$.

Or: $f(1,25) = 8 e^{-1,25}$.

Dans ces conditions, le bénéfice maximal est: $B_{\max} = 8 e^{-1,25} \times 100\,000 \text{ €}$.

Au total, le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise est:

$$B_{\max} \approx 229\,204 \text{ €}.$$