Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

16

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons, pour tout réel x de $[\,0\,;\,10\,]$, $f\,'$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{1}{0,5 + 100\,e^{-x}}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $Df = [\,0\,;\,10\,]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2 + f_3}$, avec: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 0,5$

et: $f_3(x) = 100\,e^{-x}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$.

f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$.

Par conséquent, $h = f_2 + f_3$ est dérivable sur $[\,0\,;\,10\,]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[\,0\,;\,10\,]$.

Enfin, f est dérivable sur $[\,0\,;\,10\,]$ comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{h}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[\,0\,;\,10\,]$, avec pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$, $h(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f\,'$ pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$:

$$f'(x) = \frac{0 \times (0,5 + 100\, e^{-x}) - 1 \times (-100\, e^{-x})}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}]^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{[v]^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{100\, e^{-x}}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}]^2} > 0.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $f'(x) = \dfrac{100\, e^{-x}}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}]^2} > 0.$

2. a. Montrons l'équivalence demandée:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant \dfrac{0,5}{100}$

$$\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{0,5}{100}\right)$$

$$\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{0,5}{100}\right)$$

$$\iff x \leqslant -\ln(0,005).$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$, nous avons bien:

$$100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff x \leqslant -\ln(0,005).$$

2. b. Déduisons-en le tableau de signes de f'' sur $[\,0\,;\,10\,]$:

Ici: • $f''(x) = \dfrac{100\, e^{-x} \times (100\, e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100\, e^{-x})^3}$

• $Df = [\,0\,;\,10\,]$.

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $100\, e^{-x} > 0$ et $(0,5 + 100\, e^{-x})^3 > 0.$

Le signe de f'' dépend donc du signe de: $100\, e^{-x} - 0,5.$

Or: $100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff x \leqslant -\ln(0,005) \iff x \leqslant \ln(200).$

D'où le tableau de signes de f'' sur $[0\,;\,10]$ suivant:

x	0		$\ln(200)$		10
f''		+	0	-	

3. Montrons que Cf admet un point d'inflexion noté I:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \ln(200)$.

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = \ln(200)$.

D'où: $I\,(\ln(200)\,;\, f(\ln 200))$.

4. Déterminons l'intervalle sur lequel f est concave:

Soit $[e\,;\,f]$, l'intervalle recherché.

f est concave sur $[e\,;\,f]$ ssi: pour tout $x \in [e\,;\,f]$, $f''(x) \leqslant 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $100\,e^{-x} - 0,5$.

Et: $100\,e^{-x} - 0,5 \leqslant 0$ ssi $x \in [\ln(200)\,;\,10]$.

Au total: f est concave sur $[e\,;\,f] = [\ln(200)\,;\,10]$.

Partie B:

1. a. Calculons $f(10)$ en arrondissant au centième:

$f(10) = \dfrac{1}{0,5 + 100\,e^{-10}}$ => $f(10) \approx 1,98$ °C.

Au total: $f(10) \approx 1,98$ °C.

1. b. Déduisons-en qu'en 2 150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté:

Nous avons: $f(10) \approx 1,98$ °C $<$ 2 °C.

Or: $10 = 10 \times 25$ ans, cad: 250 ans.

Et: 250 ans + 1900 = 2 150.

Ainsi: en 2 150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté car en 2 150 la température aura augmenté de 1, 98 °C, ne dépassant pas de plus de 2 °C celle de 1900.

2. a. Déterminons l'année correspondante au point d'inflexion I:

Cela revient à calculer: $x_I = \ln(200)$.

$\ln(200) \approx 5,30 \Rightarrow x_I \approx 5,30$.

Or: $5,30 \times 25$ ans $\approx 132,50$ ans.

Et: 132, 50 ans + 1900 $\approx$ 2032.

Ainsi, l'année correspondante au point I est: 2032.

2. b. Calculons le nombre de degrés Celsius supplémentaire en 2032 par rapport à 1900:

Cela revient à calculer: $f(x_I)$, cad: $f(\ln(200))$.

$$f(\ln(200)) = \frac{1}{0,5 + 100 \times \frac{1}{200}} \Rightarrow f(\ln(200)) = 1\text{ °C}.$$

Ainsi: en 2032, il y aura 1 °C supplémentaire par rapport à 1900.

3. a. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la température climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion I.

Or, nous savons que sur [0 ; 10] donc sur [x_I ; 10], la fonction f est strictement croissante car sur cet intervalle $f' > 0$ **(d'après 1.)**

Donc: il est **faux** de dire qu'après 2033 (x_I), la température climatique diminuera.

3. b. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la vitesse du réchauffement climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion I.

Or, sur [x_I ; 10], la fonction f est concave **(d'après 4.)**

Donc: il est **vrai** de dire qu'après 2033 (x_I), la vitesse du réchauffement climatique diminuera.

4. Déterminons l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de + 1,5 °C:

Il s'agit ici de déterminer la valeur de " x " telle que: $f(x) = 1,5$.

$$f(x) = 1,5 \iff \frac{1}{0,5 + 100\, e^{-x}} = 1,5$$

$$\iff \frac{3}{4} + 150\, e^{-x} = 1$$

$$\iff 3 + 600\, e^{-x} = 4$$

$$\iff 600\, e^{-x} = 1$$

$$\iff e^{x} = 600$$

$$\Rightarrow x = \ln(600) \quad \text{ou} \quad x \approx 6,40.$$

Or: $6,40 \times 25$ ans $=$ 160 ans.

Et: 160 ans $+ 1900 = 2060$.

Ainsi, l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de $+1,5\ ^\circ C$ est: 2060.