# Spé Maths
## Terminale

# « exp » : Études de fonctions

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

15

## CORRECTION

### Partie A:

**1. a. Déterminons $f'$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[-20; 20]$:**

Ici: • $f(x) = (-2x + 30)\, e^{0,2x-3}$ **(u x v)**

• $Df = [-20; 20]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = -2x + 30$ et $f_2(x) = e^{0,2x-3}$.

$f_1$ est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-20; 20]$.

$f_2$ est dérivable sur IR comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[-20; 20]$.

Par conséquent, $f$ est dérivable sur $[-20; 20]$ comme produit $(f_1 \times f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $[-20; 20]$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f'$ pour tout $x \in [-20; 20]$.

Pour tout $x \in [-20; 20]$:

$$f'(x) = (-2) \times e^{0,2x-3} + (-2x + 30) \times (0,2) \times e^{0,2x-3} \quad (u' \times v + u \times v')$$

<=> $f'(x) = e^{0,2x-3} \times (-2 - 0,4x + 6)$

=> $f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$.

Au total, pour tout $x \in [-20; 20]$: $f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$.

1. b. **Dressons le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $[-20 ; 20]$ et précisons la valeur exacte du maximum de $f$ :**

**Étape 1** : $f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$, sur $[-20 ; 20]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x$ de $[-20 ; 20]$, sachant que :

$$e^{0,2x-3} > 0.$$

• $1^{er}$ **cas** : $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} = 0$

$\iff -0,4x + 4 = 0$, cad : $x = 10$.

• $2^{ème}$ **cas** : $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} < 0$

$\iff -0,4x + 4 < 0$, cad : $x > 10$ ou $x \in ]10 ; 20]$.

• $3^{ème}$ **cas** : $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} > 0$

$\iff -0,4x + 4 > 0$, cad : $x < 10$ ou $x \in [-20 ; 10[$.

Au total : • $f$ est croissante sur $[-20 ; 10]$,

( car sur $[-20 ; 10]$, $f'(x) \geqslant 0$ )

• $f$ est décroissante sur $[10 ; 20]$.

( car sur $[10 ; 20]$, $f'(x) \leqslant 0$ )

**Étape 2**: Le tableau de variation.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

| $x$ | $-20$ | | $10$ | | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $a$ | $\nearrow$ | $b$ | $\searrow$ | $c$ |

Avec: • $a = f(-20) \Rightarrow a = 70\, e^{-7}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = 10\, e^{-1}$,

• $c = f(20) \Rightarrow c = -10\, e$.

**Étape 3**: Valeur exacte du maximum de $f$.

Soit E $(x_E\,; y_E)$, le maximum de $f$ sur $[-20\,; 20]$.

$x_E$ est tel que: $f'(x_E) = 0$.

$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 10$ et donc $y_E = 10\, e^{-1}$.

Au total: le point E $(10\,; 10\, e^{-1})$ est le maximum de $f$ sur $[-20\,; 20]$.

**2. a. Montrons que, sur $[-20\,; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution $\alpha$:**

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit $f$ une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction $f$ est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.



Ici: • $f$ est continue sur $[-20; 20]$, donc sur $]10; 20]$.

• " $k = -2$ " est compris entre: $f(20) = -10e$

et: $f(10) = 10e^{-1}$.

• $f$ est strictement décroissante sur $]10; 20]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = -2$ $(k = -2)$ admet une unique solution $\alpha$ appartenant à $]10; 20]$, et plus généralement à $[-20; 20]$.

Au total: $f(x) = -2$ admet exactement une solution $\alpha$ sur $[-20; 20]$.

**2. b. Donnons un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0, 1:**

Par tâtonnement, nous trouvons: $15,8 < \alpha < 15,9$.

Au total, un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0, 1 est:

$$15,8 < \alpha < 15,9.$$

3. a. **Calculons la valeur exacte de $\int_{10}^{15} f(x)\,dx$:**

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_{10}^{15} f(x)\,dx$,

cad: $I = [\,F(x)\,]_{10}^{15}$.

$I = [\,F(x)\,]_{10}^{15}$

$= [\,(-10x + 200)\,e^{0,2x-3}\,]_{10}^{15}$ (logiciel)

=> $I = 50 - 100\,e^{-1}$.

Au total: $I = \int_{10}^{15} f(x)\,dx = 50 - 100\,e^{-1}$.

3. b. **Déterminons le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe et précisons l'abscisse du point d'inflexion:**

- Soit $[\,e\,;f\,]$, l'intervalle recherché.

Ici: • $f''(x) = (-0,08x + 0,4)\,e^{0,2x-3}$. (logiciel)

$f$ est convexe sur $[\,e\,;f\,]$ ssi: pour tout $x \in [\,e\,;f\,]$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or le signe de $f''$ dépend du signe de: $-0,08x + 0,4$ (car $e^{0,2x-3} > 0$).

Dans ces conditions: $f''(x) \geqslant 0$ ssi $-0,08x + 0,4 \geqslant 0$,

cad: $x \leqslant 5$ ou $x \in [\,-20\,;5\,]$.

Au total: $f$ est convexe sur $[\,e\,;f\,] = [\,-20\,;5\,]$.

- Point d'inflexion ?

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = 5$.

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = 5$.

## Partie B:

**1. Calculons le dénivelé de cette nouvelle piste:**

Le dénivelé de cette nouvelle piste est: $f(x_B) - f(x_A)$.

Or: $x_B = 10$ et $x_A = 0$.

D'où: $f(x_B) - f(x_A) = f(10) - f(0)$

$$= 10\,e^{-1} - 30\,e^{-3}$$

$$\approx 2,185 \text{ km}.$$

Au total, le dénivelé de cette nouvelle piste, arrondi au mètre, est: 2 185 m.

**2. Déterminons le niveau de difficulté de cette nouvelle piste:**

Pour répondre à cette question, nous devons calculer la pente au maximum de la courbe, pour $x \in [0; 10]$.

Or, le maximum est atteint au point: $x = 5$ (d'après **3. b.**).

Dans ces conditions, la pente de $f$ quand $x = 5$ est:

$$f'(5) = 2\,e^{-2} \implies f'(5) \approx 27\%$$

Au total, le niveau de difficulté de cette nouvelle piste est: rouge.