

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons en justifiant la valeur de $f'(-2)$:

D'après l'énoncé: la tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point A $(-2; f(-2))$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Cela justifie le fait que: $f'(-2) = 0$.

Notons aussi que le point A est le maximum de f sur $[-4; 10]$.

2. A l'aide du graphique, déterminons le signe de $f'(4)$:

A l'aide du graphique, nous remarquons qu'à partir du point A d'abscisse $x = -2$ et jusqu'au point d'abscisse $x = 10$, la courbe (\mathcal{C}) décroît.

Par conséquent, entre ces deux points f est décroissante.

Or: $x = 4 \in]-2; 10]$.

Donc nous pouvons affirmer que: $f'(4) < 0$.

3. A l'aide du graphique, déterminons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire S :

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire S du domaine compris entre la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$, est telle que: $3 < S < 4$.

Au total, l'aire demandée S est telle que: $3 < S < 4$ u. a.

Partie B:

1. a. Montrons que $f'(x) = (-0,5x - 1) e^{-0,5x}$:

Ici: • $f(x) = (x + 4) e^{-0,5x}$ (u x v)

• $Df = [-4; 10]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = (x + 4)$ et $f_2(x) = e^{-0,5x}$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-4; 10]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[-4; 10]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-4; 10]$ comme produit ($f_1 \times f_2$) de 2 fonctions dérivables sur $[-4; 10]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-4; 10]$.

Pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = (1) \times e^{-0,5x} + (x + 4) \times (-0,5) \times e^{-0,5x} \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-0,5x - 1) e^{-0,5x}.$$

Au total, pour tout $x \in [-4; 10]$: $f'(x) = (-0,5x - 1) e^{-0,5x}$.

1. b. Étudions le sens de variation de f sur $[-4; 10]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-0,5x - 1) e^{-0,5x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x - 1 = 0^*, \text{ cad: } x = -2.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-0,5x - 1) e^{-0,5x} < 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x - 1 < 0^*, \text{ cad: } x > -2 \text{ ou } x \in]-2; 10].$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-0,5x - 1) e^{-0,5x} > 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x - 1 > 0^*, \text{ cad: } x < -2 \text{ ou } x \in [-4; -2[.$$

(*: car pour tout x de $[-4; 10]$, $e^{-0,5x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[-4; -2]$,

(car sur $[-4; -2]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[-2; 10]$.

(car sur $[-2; 10]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-4	-2	10
f'	+	0	-
f			

- Avec:
- $a = f(-4) \Rightarrow a = 0,$
 - $b = f(-2) \Rightarrow b = 2e,$
 - $c = f(10) \Rightarrow c = 14e^{-5}.$

1. c. Montrons que sur $[1; 6]$ l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[1; 6]$.

- " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(6) = 10e^{-3}$

$$\text{et: } f(1) = 5e^{-0,5}.$$

- f est strictement décroissante sur $[1; 6]$, car strictement décroissante sur $]-2; 10]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet une **unique** solution α appartenant à $[1; 6]$.

Au total: $f(x) = 1,5$ admet exactement une solution unique α sur $[1; 6]$.

1. d. Donnons une valeur approchée à 10^{-2} de α :

Par tâtonnement, nous trouvons: $\alpha \approx 3,11$.

Au total: $\alpha \approx 3,11$.

2. a. Étudions la convexité de la fonction f sur $[-4; 10]$:

Ici: • $f(x) = (x + 4) e^{-0,5x}$

• $Df = [-4; 10]$

• $f''(x) = 0,25x e^{-0,5x}$.

Or: • f est convexe ssi: $f''(x) \geq 0$,

• f est concave ssi: $f''(x) \leq 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$, sachant que: $e^{-0,5x} > 0$.

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$f''(x) \geq 0$ ssi $0,25x \geq 0$, cad: $x \geq 0$ ou $x \in [0; 10]$.

• 2^{ème} cas: $f''(x) \leq 0$.

$f''(x) \leq 0$ ssi $0,25x \leq 0$, cad: $x \leq 0$ ou $x \in [-4; 0]$.

Au total: • f est convexe sur $[0; 10]$ et est strictement convexe sur $]0; 10[$,

• f est concave sur $[-4; 0]$ et est strictement concave sur $[-4; 0[$.

2. b. Dédudions-en que la courbe (\mathcal{C}) admet un unique point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = 0$.

Ainsi, les coordonnées du point d'inflexion sont: $I(0; f(0))$ cad $I(0; 4)$.

3. a. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur $[-4; 10]$:

Sur l'intervalle $[-4; 10]$, il suffit de montrer que: $F'(x) = f(x)$.

3. b. Calculons S :

Ici, il s'agit de calculer: $S = \int_2^4 f(x) dx$

$$\text{cad: } S = \int_2^4 (x + 4) e^{-0,5x} dx.$$

f est continue sur $[2; 4]$, elle admet donc des primitives sur $[2; 4]$ et par conséquent: S existe.

$$S = \int_2^4 f(x) dx$$

$$= [F(x)]_2^4$$

$$= [(-2x - 12) e^{-0,5x}]_2^4 \quad (\text{d'après l'énoncé})$$

$$\Rightarrow S = -20 x e^{-2} + 16 x e^{-1} \quad \text{ou} \quad S \approx 3,18 \quad (\text{valeur arrondie au centième}).$$

Au total: $S \approx 3,18$ u. a.