

www.freemaths.fr

# Spé Maths

## Terminale

« exp » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A:

1. a. Etudions le signe de  $f'$  sur  $[0; 1]$ :

Ici: •  $f(x) = (1-x)e^{3x}$

•  $Df = [0; 1]$

•  $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$ .

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-3x + 2)e^{3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 = 0^*, \text{ cad: } x = \frac{2}{3}.$$

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-3x + 2)e^{3x} < 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 < 0^*, \text{ cad: } x > \frac{2}{3} \text{ ou } x \in \left] \frac{2}{3}; 1 \right].$$

• 3<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-3x + 2)e^{3x} > 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 > 0^*, \text{ cad: } x < \frac{2}{3} \text{ ou } x \in \left[ 0; \frac{2}{3} \right[.$$

(\*: car pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $e^{3x} > 0$ )

- Au total:**
- $f$  est croissante sur  $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ ,  
(car sur  $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )
  - $f$  est décroissante sur  $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ .  
(car sur  $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

1. b. Donnons le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 1]$ , en précisant les valeurs utiles:

- Comme nous l'avons déjà dit:
- $f$  est croissante sur  $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ ,
  - $f$  est décroissante sur  $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

$x$	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'$	+	0	-
$f$			

- Avec:
- $a = f(0) \Rightarrow a = 1$ ,
  - $b = f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{3}e^2$ ,
  - $c = f(1) \Rightarrow c = 0$ .

## 2. Déterminons les coordonnées du point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Nous savons que:  $f''(x) = 3(1 - 3x)e^{3x}$ .

Or, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ :  $e^{3x} > 0$ .

D'où:  $f''(x) = 0$  ssi  $3(1 - 3x) = 0$ , cad:  $x = \frac{1}{3}$ .

Au total, les coordonnées du point d'inflexion sont:  $\left(\frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$  cad  $\left(\frac{1}{3}; \frac{2e}{3}\right)$ .

### Partie B:

1. Vérifions que les points A (1; 0) et B (0; 1) sont des points communs aux courbes Cf et Cg:

- Le point A (1; 0) est commun aux courbes Cf et Cg ssi:

$$\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ g(x_A) = y_A \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} (1 - x_A) e^{3x_A} = 0 \\ x_A^2 - 2x_A + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

$$\text{Or: } (\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 1) e^{3 \times 1} = 0 \\ 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}.$$

- Le point B (0; 1) est commun aux courbes Cf et Cg ssi:

$$\begin{cases} f(x_B) = y_B \\ g(x_B) = y_B \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} (1 - x_B) e^{3x_B} = 1 \\ x_B^2 - 2x_B + 1 = 1 \end{cases} \quad (\text{II}).$$

$$\text{Or: (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-0)e^{3 \times 0} = 1 \\ 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B = 1 \\ y_B = 1 \end{cases}.$$

**Au total:** les points A et B sont communs aux courbes Cf et Cg.

2. a. Justifions que pour tout  $x$  dans  $[0; 1]$ ,  $e^{3x} - 1 \geq 0$ :

Pour tout  $x \in [0; 1]$ , nous avons:

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^0 \leq e^{3x} \leq e^3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^{3x} \leq e^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq e^{3x} - 1 \leq e^3 - 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{3x} - 1 \leq e^3 - 1 \text{ ou } e^{3x} - 1 \geq 0.$$

**Au total, pour tout  $x \in [0; 1]$ :**  $e^{3x} - 1 \geq 0$ .

2. b. Déduisons-en que pour tout  $x$  dans  $[0; 1]$ ,  $e^{3x} - 1 + x \geq 0$ :

Pour tout  $x \in [0; 1]$ , nous avons:

$$\bullet x \geq 0 \quad (1)$$

$$\bullet e^{3x} - 1 \geq 0 \quad (2)$$

En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), nous obtenons:

$$(1) + (2) \Leftrightarrow x + e^{3x} - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{3x} - 1 + x \geq 0.$$

**Au total, pour tout  $x \in [0; 1]$ :**  $e^{3x} - 1 + x \geq 0$ .

2. c. Etudions le signe de  $f(x) - g(x)$  pour tout  $x$  dans  $[0; 1]$ :

$$f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x).$$

Comme  $e^{3x} - 1 + x \geq 0$ , le signe de  $f(x) - g(x)$  dépend du signe de " $1 - x$ ".

Or, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $1 - x \geq 0$ .

Dans ces conditions: pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) - g(x) \geq 0$ .

Au total, le signe de  $f(x) - g(x)$ , pour tout  $x$  dans  $[0; 1]$  est:

positif ou nul.

3. a. Calculons  $I = \int_0^1 g(x) dx$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$ .

$g$  est continue sur  $[0; 1]$ , elle admet donc des primitives sur  $[0; 1]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}.$$

Au total:  $I = \frac{1}{3}$ .

3. b. Calculons l'aire  $S$ , en arrondissant au dixième:

Ici, il s'agit de calculer:  $S = \int_0^1 (1 - x)(e^{3x} - 1 + x) dx$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[0; 1]$ , et donc la fonction  $f - g$  est continue sur  $[0; 1]$ .  $f - g$  admet donc des primitives sur  $[0; 1]$  et par conséquent:  $S$  existe.

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \frac{e^3 - 4}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{e^3 - 7}{9} \text{ cad } I \approx 1,5 \text{ u. a.}, \text{ en arrondissant au dixième.}$$

Au total:  $S \approx 1,5 \text{ u. a.}$