Spé Maths
Terminale

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

11

CORRECTION

Partie A:

1. Montrons que, pour tout $x \in [0; 4]$, $f'(x) = (-2,16x + 2,16)\,e^{-0,6x}$:

Ici: • $f(x) = (3,6x + 2,4)\,e^{-0,6x} - 1,4$ $\quad$ $(u \times v) - 1,4$

• $Df = [0; 4]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = 3,6x + 2,4$, $f_2(x) = e^{-0,6x}$

et $f_3(x) = -1,4$.

f est dérivable sur $[0; 4]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[0; 4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 4]$.

Pour tout $x \in [0; 4]$:

$$f'(x) = (3,6) \times (e^{-0,6x}) + (3,6x + 2,4) \times (-0,6e^{-0,6x}) \qquad (u' \times v + u \times v')$$

$$= 3,6e^{-0,6x} - 2,16x\,e^{-0,6x} - 1,44e^{-0,6x}$$

$$= (-2,16x + 2,16)\,e^{-0,6x}.$$

Au total, pour tout $x \in [0; 4]$, nous avons bien: $f'(x) = (-2,16x + 2,16)\,e^{-0,6x}$.

2. a. Etudions le signe de $f'(x)$ sur $[0; 4]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 4]$:

• **1^er^ cas** : $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-2,16x + 2,16 = 0$, cad : $x = 1$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,6x} > 0$)

• **2^ème^ cas** : $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-2,16x + 2,16 < 0$, cad : $x \in]\,1 ; 4\,]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,6x} > 0$)

• **3^ème^ cas** : $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-2,16x + 2,16 > 0$, cad : $x \in [\,0 ; 1\,[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,6x} > 0$)

Au total : • f est croissante sur $[\,0 ; 1\,]$,

(car sur $[\,0 ; 1\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[\,1 ; 4\,]$.

(car sur $[\,1 ; 4\,]$, $f'(x) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau de variations de f sur $[\,0 ; 4\,]$:

Sur $[\,0 ; 4\,]$, le tableau de variations de f est le suivant :

	0		1		4
		+	0	-	
			b		
	a	↗		↘	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 1$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12$.

3. a. Calculons la valeur exacte de $\int_0^4 f(x)\,dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^4 f(x)\,dx$.

f est continue sur $[0; 4]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 4]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx$$

$$= [F(x)]_0^4$$

$$= [(-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x]_0^4$$

$$= 8,4 - 38e^{-2,4}.$$

Au total, une valeur exacte de I est: $I = 8,4 - 38e^{-2,4}$.

3. b. Déterminons une valeur approchée de I:

Une valeur approchée de I est: $I \approx 4,95$.

Partie B:

1. Montrons que $\int_0^{0,5} g(x)\,dx = \frac{1}{6}$:

Ici, il s'agit de calculer: $J = \int_0^{0,5} g(x)\,dx$.

g est continue sur $[\,0\,;\,0,5\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;\,0,5\,]$ et par conséquent: J existe.

$$J = \int_0^{0,5} g(x)\,dx$$

$$= \int_0^{0,5} (4x^2 - 4x + 1)\,dx$$

$$= \left[\,\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\,\right]_0^{0,5}$$

$$= \frac{4}{3}\,(0,5)^3 - 2\,(0,5)^2 + 0,5$$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{8}\right) - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Au total, nous avons bien: $\boldsymbol{J = \frac{1}{6}}$.

2. Calculons une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine:

L'aire demandée $\mathscr{A}$ est égale à deux fois l'aire du domaine colorié située au dessus de l'axe des abscisses.

Ainsi: $$\mathscr{A} = 2 \times \left(\int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^{0,5} g(x)\,dx \right)$$

$$= 2 \times (\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\,).$$

D'où: $$\mathscr{A} \approx 2 \times \left(4,95 - \frac{1}{6}\right)$$

$$\approx 9,57.$$

Au total, une valeur approchée de l'aire du domaine colorié est:

$$\mathscr{A} \approx 9,57 \text{ unités d'aire.}$$