

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons graphiquement la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A:

La quantité de produit B dépasse celle de produit A dès que la courbe \mathcal{C}_g se situe au dessus de la courbe \mathcal{C}_f .

Or cela se produit quand: $x \in]5; 6[$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 5,3 \text{ mois.}$$

Au total, la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A est d'environ: 5,3 mois.

2. Déterminons au bout de combien de mois la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte par le produit B:

La quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B quand: $g(x) = 3000$.

Or cela se produit quand: $x \in]12; 13[$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 12,7 \text{ mois.}$$

Au total, la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B au bout d'environ: 12,7 mois.

Partie B:

1. a. Déterminons ce que modélise cette fonction:

Comme $h(x) = f(x) + g(x)$, $h(x)$ représente la quantité totale de produit A et de produit B fabriquées par l'usine.

1. b. Montrons que, pour tout $x \in [0; 14]$, $h'(x) = -400 e^{-0,2x} + 30x + 50$:

- Ici:
- $f(x) = 2000 e^{-0,2x}$
 - $g(x) = 15x^2 + 50x$
 - $Df = Dg = [0; 14]$.

f et g sont toutes deux dérivables sur $[0; 14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' et g' sur $[0; 14]$.

Pour tout $x \in [0; 14]$:

- $f'(x) = -0,2 \times 2000 \times e^{-0,2x}$
 $= -400 e^{-0,2x}$;
- $g'(x) = 30x + 50$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; 14]$: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

cad: $h'(x) = -400 e^{-0,2x} + 30x + 50$.

2. a. a). Montrons que sur $[0; 14]$, l'équation $h'(x) = 0$ admet une solution unique α :

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • h' est continue sur $[0; 14]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $h'(0) = -350$

et: $h'(14) \approx 446$.

• h' est strictement croissante sur $[0; 14]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $h'(x) = 0$ ($k = 0$) admet une **unique** solution α appartenant à l'intervalle $[0; 14]$.

Au total: $h'(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[0; 14]$.

2. a. a2. Donnons un encadrement d'amplitude $0, 1$ de α :

Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \in [4, 1; 4, 2]$.

Au total, un encadrement d'amplitude $0, 1$ de α est: $4, 1 \leq \alpha \leq 4, 2$.

2. b. Déduisons-en les variations de la fonction h sur $[0; 14]$:

D'après les questions précédentes, nous pouvons en déduire que:

- h est strictement décroissante sur: $[0; \alpha[$, car $h'(x) < 0$,
- h est strictement croissante sur: $] \alpha; 14]$, car $h'(x) > 0$,
- h admet un minimum au point: $M(\alpha; h(\alpha))$.

3. a. Déterminons ce que contient alors la variable X après l'exécution de cet algorithme:

Notons qu'après l'exécution de cet algorithme, la variable X contient, à $0, 1$ près, la première valeur telle que $Y > 0$ cad $h'(X) > 0$ soit: une valeur approchée de α à $0, 1$ près.

3. b. Modifions l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à $0, 001$ près de α après l'exécution de l'algorithme:

En supposant toujours que la variable X contienne la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, pour répondre à la question nous devons juste modifier la ligne $X \leftarrow X + 0, 1$.

Modification de la ligne $X \leftarrow X + 0, 1$ en: $X \leftarrow X + 0, 001$.

4. a. Vérifions que H est bien une primitive de la fonction h sur $[0; 14]$:

Sur l'intervalle $[0; 14]$, H est une primitive de h ssi: $H'(x) = h(x)$.

Ici: $H(x) = -10000e^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2$.

D'où: $H'(x) = (-10000) \times (-0,2e^{-0,2x}) + 15x^2 + 50x$
 $= 2000e^{-0,2x} + 15x^2 + 50x = h(x)$.

Au total: H est bien une primitive de h sur $[0; 14]$.

4. b. Calculons une valeur approchée à l'unité près de $\frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$:

Préalablement, notons que $\frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$ correspond à la valeur moyenne

" m " de h sur $[0; 12]$.

Dans ces conditions: $m = \frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$
 $= \frac{1}{12} [H(x)]_0^{12}$
 $= \frac{1}{12} (H(12) - H(0))$
 ≈ 1778 .

Ainsi, la valeur moyenne de h sur $[0; 12]$ est d'environ: 1778.

4. c. Donnons une interprétation de m dans le contexte de l'exercice:

Ici, l'interprétation de m est: m correspond à la production moyenne en produits A et B sur les 12 premiers mois.